

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE • BAND 30 • HEFT 8 • DEZEMBER 1937

Über die Auswertung von Zählrohrmessungen

Von J. Meixner

§ 1. Einleitung

Zählrohrmessungen kann man mit zwei grundsätzlich verschiedenen Zielen anstellen. Einmal kann man untersuchen, ob die Zählrohrimpulse, die durch Höhenstrahlung oder durch radioaktive Präparate ausgelöst werden, statistisch verteilt sind, bzw. man kann aus Abweichungen von der statistischen Verteilung feststellen, ob Eigenerrichtung des Zählrohrs vorhanden ist, oder wie lange es dauert, bis ein Zählrohr nach einem Impuls wieder auf einen neuen Impuls ansprechen kann, oder ob mehrere abhängige Effekte überlagert sind (z. B. ein aktives Präparat mit aktiven Folgeprodukten). Zum anderen will man aus Impulszahlen, die in gewissen Zeitintervallen gemessen werden, Schlüsse ziehen auf die Werte gewisser Parameter, wie Halbwertszeit, Aktivität eines Präparats, relative Stärke der Höhenstrahlung usw., und auf die Genauigkeit, mit der diese Parameter aus der betreffenden Messung bestimmt sind.

Zur Theorie der Statistik der Zählrohrimpulse erwähnen wir neben der klassischen Abhandlung von Bortkiewicz¹⁾ die Untersuchungen von Ruark und Devol²⁾ und von Medicus³⁾. Dort ist auch weitere Literatur angegeben.

Mit der Bestimmung von Halbwertszeiten, Absorptionskoeffizienten und ihren mittleren Fehlern beschäftigt sich eine Arbeit von Peierls⁴⁾, während sich u. a. Volz⁵⁾ und Schiff⁶⁾ mit der Korrektur befassen, die durch das endliche Auflösungsvermögen der Zählordnung nötig wird.

In der vorliegenden Arbeit behandeln wir zunächst einige allgemeine Eigenschaften der Poissonschen Verteilung, insbesondere

1) L. v. Bortkiewicz, Die radioaktive Strahlung als Gegenstand wahrscheinlichkeitstheoretischer Untersuchungen. Berlin, 1913.

2) A. Ruark u. L. Devol, Phys. Rev. **49**. S. 355. 1936; L. Devol u. A. Ruark, Phys. Rev. **51**. S. 710. 1937.

3) G. Medicus, Ztschr. f. Phys. **103**. S. 76. 1936.

4) R. Peierls, Proc. Roy. Soc. Lond. (A) **149**. S. 467. 1935.

5) H. Volz, Ztschr. f. Phys. **93**. S. 539. 1935.

6) L. I. Schiff, Phys. Rev. **50**. S. 88. 1936.

den mittleren Fehler eines Effekts, der als Differenz zweier „im Mittel konstanter“ Effekte bestimmt wird, sowie den allgemeinen Beweis zu einer Überlegung von Bothe¹⁾; ferner allgemeine Eigenschaften zeitlich veränderlicher statischer Effekte, insbesondere Bestimmung von Aktivitäten, Halbwertszeiten und ihrer mittleren Fehler. In einer Reihe von Spezialfällen (einfacher Zerfall, Überlagerung eines Zerfalls durch einen konstanten Nulleffekt, Überlagerung zweier Zerfälle mit verschiedenen Halbwertszeiten usw.) werden wir fertige Formeln und Tabellen zur Bestimmung des mittleren Fehlers der Halbwertszeiten und zum Teil auch der Aktivitäten angeben. Diese Spezialfälle sind so gewählt, daß gerade so viele Intervalle auszählen sind, als für die Bestimmung der unbekannten Parameter notwendig sind. Es ist zwar immer möglich (im Gegensatz zu konstanten Effekten mit Poissonscher Verteilung) durch Unterteilung der Intervalle die Genauigkeit der zu bestimmenden Parameter zu erhöhen; jedoch ist diese Erhöhung der Genauigkeit in vielen Fällen nicht beträchtlich, während andererseits die rechnerische Auswertung der Messungen wesentlich umständlicher wird.

§ 2. Die Poissonsche Wahrscheinlichkeitsverteilung

Mißt man Höhenstrahlung oder ein radioaktives Präparat von großer mittlerer Lebensdauer mit dem Zählrohr, so sind die Zählrohrimpulse vollständig unregelmäßig, d. h. nach dem Poissonschen Gesetz verteilt (vorausgesetzt, daß die Zählordnung richtig arbeitet); ist der Mittelwert der Impulszahl pro Zeiteinheit (aus einer Messung über sehr lange Zeit, die aber im Fall des radioaktiven Präparats noch klein gegen die Lebensdauer ist, bestimmt) gleich Z , so ist die Wahrscheinlichkeit, daß man in einem Intervall der Länge t gerade n Impulse zählt,

$$(1) \quad w(Zt; n) = \frac{(Zt)^n}{n!} e^{-Zt}.$$

Der Mittelwert dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung ist natürlich

$$(2) \quad \bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n w(Zt; n) = Zt.$$

Das Quadrat der mittleren Schwankung ist

$$(3) \quad \overline{\delta n^2} = \overline{(n - \bar{n})^2} = \bar{n^2} - \bar{n}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 w(Zt; n) - \bar{n}^2 = Zt;$$

1) W. Bothe, Phys. Ztschr. 37. S. 520. 1936.

d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß n im Bereich $Zt \pm \sqrt{Zt}$ liegt, ist für nicht zu kleine Zt und n etwa 0,68. (Das folgt einfach, wenn man $n!$ durch die Stirlingsche Formel ersetzt und den Übergang zur Gaussischen Verteilung macht.)

Eine Impulsverteilung, die der Poissonschen Formel (1) entspricht, nennen wir „im Mittel“ konstant.

Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Poissonschen Verteilung ist folgende: Überlagern wir mehrere im Mittel konstante Effekte, d. h. messen wir etwa gleichzeitig mehrere Präparate mit großer Lebensdauer und nehmen eine Statistik auf, so gilt für den Summeneffekt wieder die Poissonsche Verteilung (1). Darin bedeutet dann Z die Summe der Mittelwerte pro Zeiteinheit der einzelnen Effekte.

An der meßbaren Poissonschen Verteilung eines im Mittel konstanten Effektes läßt sich also nicht erkennen, ob er zusammengesetzt ist.

Sind mehrere Intervalle (die sich ausschließen) von den Längen t_1, t_2, \dots, t_k gegeben, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß im ersten Intervall n_1 , im zweiten n_2, \dots , im k -ten n_k Impulse gezählt werden, gleich

$$(4) \quad w(Zt_1; n_1) w(Zt_2; n_2) \dots w(Zt_k; n_k) = \prod_{i=1}^k \frac{(Zt_i)^{n_i}}{n_i!} e^{-Zt_i}.$$

Die Unregelmäßigkeit der Impulse, und damit z. B. den statistischen Charakter des radioaktiven Zerfalls, weist man gewöhnlich auf zwei verschiedene Arten nach; einmal indem man eine große Zahl von gleichlangen Intervallen auszählt und feststellt, wieviele Intervalle keinen Impuls, wieviele einen Impuls usw. enthalten, und diese Anzahlen mit der Poissonschen Verteilung vergleicht; oder indem man die Abstände je zweier aufeinanderfolgenden Impulse mißt und die Häufigkeit der Abstände aufträgt. Die Wahrscheinlichkeit, daß von einem gegebenen Augenblick an das Intervall t frei bleibt und der nächste Impuls in das Intervall t bis $t + dt$ fällt, ist

$$(5) \quad w(Z, t) dt = e^{-Zt} \cdot Z dt.$$

Trägt man also die Häufigkeitsverteilung der Abstände logarithmisch auf, so ergibt sich eine abfallende Gerade. Besonders schöne Versuchsergebnisse hierzu findet man bei Medicus¹⁾.

Abweichungen von den Gesetzen (1) bzw. (5) können auf verschiedene Ursachen zurückzuführen sein. Nachentladungen im Zählrohr [Eigenerregung¹⁾], oder ein Auflösungsvermögen der Zählordnung

1) G. Medicus, a. a. O.

nung, das vergleichbar ist mit der Impulsdichte, oder Überlagerung abhängiger Effekte (Muttersubstanz von langer Lebensdauer und Tochtersubstanz im Gleichgewicht¹⁾, lassen sich an der Art der Abweichungen von (1) und (5) erkennen. —

Hat man es hier immer mit der Frage zu tun, welche Wahrscheinlichkeit sich für ein bestimmtes n bei gegebenem Z ergibt, so soll uns nun die Frage beschäftigen, was man bei gemessener Impulszahl n im Intervall t über Z aussagen kann. Nach Bayes ist die Wahrscheinlichkeit, daß Z einen Wert zwischen Z und $Z + dZ$ hat, gegeben durch

$$(6) \quad W(Z, t, n) dZ = w_a(Z) \cdot w(Zt; n) \cdot N \cdot dZ.$$

$w_a(Z)$ ist die a-priori-Wahrscheinlichkeit für Z ; sie gibt die Kenntnis von Z wieder, die man vor Anstellung des Versuches hat; hat man keinen Vorversuch gemacht, so kann sie bei großem n praktisch als konstant angenommen werden. $w(Zt; n)$ ist die Funktion (1); N ist ein Faktor, der nicht von Z abhängt und die Gesamtwahrscheinlichkeit auf 1 normiert. Damit wird also:

$$(7) \quad W(Z, t, n) dZ = \frac{(Zt)^n}{n!} e^{-Zt} dZ.$$

Daraus ergibt sich:

$$(8) \quad \bar{Z} = \frac{n+1}{t}; \quad \overline{\delta Z^2} = \frac{n+1}{t^2} = \frac{\bar{Z}}{t}.$$

Auch hier gilt, daß Z mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 68% zwischen $\frac{n+1}{t} \pm \sqrt{\frac{n+1}{t^2}}$ liegt, wenn $n \gg 1$. Unter dieser Bedingung kann man $n+1$ in (8) praktisch durch n ersetzen und (2), (3) gehen in (8) über, wenn man Zt und n vertauscht.

Der mittlere Fehler δZ^2 von Z läßt sich *nicht* verkleinern, indem man die Meßreihe unterteilt; die beste Kenntnis, die man von Z gewinnen kann, würde sich ergeben, wenn man das Intervall t in beliebig viele infinitesimale Intervalle unterteilt, mit anderen Worten, indem man von jedem Impuls den genauen Zeitpunkt bestimmt. Dann ist die Rückschlußwahrscheinlichkeit auf Z durch (4) gegeben; der von Z abhängige Teil von (4) ist $Z^n e^{-Zt}$. Die Wahrscheinlichkeit $w_a(Z) \cdot Z^n e^{-Zt} N dZ$ hängt also nicht von der Unterteilung der Meßreihe ab, da in ihr von den Meßgrößen nur die im ganzen Intervall t gezählte Impulszahl n eingeht; den Beweis für eine spezielle Unterteilung (Halbierung des Meßintervalls) hat bereits Bothe²⁾ erbracht. — Aus der Verteilung der Abstände zwischen je zwei Im-

1) L. Devol u. A. Ruark, a. a. O.

2) W. Bothe, a. a. O.

pulsen kann man natürlich keine bessere Kenntnis von Z erhalten, als aus den Zeitpunkten der einzelnen Impulse selbst. Damit ist eine Vermutung von Medicus¹⁾ widerlegt, nach der man aus der Verteilung der Abstände zwischen je zwei Impulsen Z mit einem kleineren Fehler als $\frac{1}{t} \sqrt{Z}$ bestimmen könnte.

Im Gegensatz hierzu kann z. B. bei „im Mittel“ exponentiell abfallenden Impulsdichten eine Unterteilung der Meßreihe die Genauigkeit der zu bestimmenden Halbwertszeit erhöhen (vgl. § 4. A).

Eine Anwendung dieser Rückschlußwahrscheinlichkeiten gibt die Bestimmung der Differenz oder der Summe zweier im Mittel konstanter Effekte. Seien zwei Effekte gemessen mit n_1 Impulsen in der Zeit t_1 , bzw. n_2 Impulsen in der Zeit t_2 ; dann sind für die mittleren Impulszahlen Z_1 bzw. Z_2 Wahrscheinlichkeiten nach (7) gegeben. Nach allgemeinen Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung subtrahieren bzw. addieren sich dann die Mittelwerte Z_1 und Z_2 , während sich die mittleren Fehler von Z_1 und Z_2 bei der Differenz und bei der Summe der Effekte addieren; also

$$(9) \quad \bar{Z} = \bar{Z}_1 \pm \bar{Z}_2 = \frac{n_1 + 1}{t_1} \pm \frac{n_2 + 1}{t_2},$$

$$(10) \quad \overline{\delta Z^2} = \overline{\delta Z_1^2} + \overline{\delta Z_2^2} = \frac{n_1 + 1}{t_1^2} + \frac{n_2 + 1}{t_2^2}.$$

Diese Formel findet Anwendung, wenn man einen im Mittel konstanten Effekt Z messen will, der von einem ebensolchen Nulleffekt Z_0 überlagert wird. Bemerkenswert daran ist, daß nicht auf gleiche Meßdauer bezogen wird, sondern daß man etwa den Nulleffekt allein über sehr lange Zeit, d. h. mit großer Genauigkeit messen kann. Dann geht der mittlere Fehler des Nulleffekts in (10) praktisch nicht mehr ein. Die Schwankung des Nulleffekts, soweit er in t_1 gemessen wurde, steckt nur mehr in $n_1 + 1$.

Zusatz. Verallgemeinerung der Poissonschen Verteilung. Ist der Mittelwert Z genau bekannt, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß n Impulse in einem Intervall der Länge t gezählt werden, gegeben durch (1). Z ist aber immer gegeben durch eine Messung von endlicher Dauer; d. h. für jeden Wert von Z sind nur Wahrscheinlichkeiten $W(Z, \tau, \nu) dZ$ nach (7) gegeben, wenn ν Impulse im Intervall τ gezählt wurden. Also ist die Wahrscheinlichkeit, daß in einer folgenden Messung n Impulse im Intervall t gezählt werden, gegeben durch

$$(11) \quad w(t, n; \tau, \nu) = \int w(Z t; n) W(Z, \tau, \nu) dZ = \frac{t^n \tau^{\nu+1}}{(t + \tau)^{n + \nu + 1}} \binom{n + \nu}{n}.$$

1) G. Medicus, a. a. O., S. 88, Anmerkung.

Mittelwert und Quadrat der mittleren Schwankung dieser Verteilung sind

$$(12) \quad \bar{n} = \frac{t}{\tau}(\nu + 1); \quad \overline{\delta n^2} = \frac{t}{\tau} \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)(\nu + 1).$$

Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung kann nicht direkt nachgeprüft werden, weil man dazu eine große Reihe von Zählrohrmessungen von beliebigen konstanten Effekten in einem Intervall τ machen müßte, um dann alle die auszusondern, die eine gewisse Zahl ν ergeben. Von den letzteren ist dann jeweils eine zweite Messung zu machen in einem Intervall t ; die Ergebnisse dieser Messungen wären dann mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung (11) zu vergleichen.

Wegen einer Anwendungsmöglichkeit dieser Verteilung verweisen wir auf eine demnächst an anderer Stelle erscheinende Arbeit.

Diese Verteilung spielt nach Eggenberger und Pólya¹⁾ auch eine Rolle für die Wahrscheinlichkeitsansteckung; verschiedene mathematische Eigenschaften derselben (orthogonale Polynome) sind in einer früheren Arbeit des Verfassers²⁾ untersucht worden.

§ 3. Allgemeines über zeitlich veränderliche statistische Effekte

Außer den im Mittel konstanten Effekten sind von besonderem Interesse die Effekte, die „im Mittel“ nach dem Exponentialgesetz abfallen. Wir nehmen an, ein radioaktives Präparat mit der Zerfallskonstanten λ enthalte N aktive Atomkerne zur Zeit $T = 0$; wir nehmen ferner an, daß das Folgeprodukt inaktiv ist. Nun möge eine Messung ausgeführt werden, bei der die Impulszahlen des Zählrohrs in k einander ausschließenden Intervallen gezählt werden. Sie seien n_1, n_2, \dots, n_k . Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ergebnis ist³⁾

$$(13) \quad w(N, \lambda; n_1, \dots, n_k) = \frac{N!}{n_1! \dots n_k! (N - n)!} w_1^{n_1} \dots w_k^{n_k} (1 - w)^{N - n}.$$

$n = n_1 + \dots + n_k$ = Gesamtzahl der beobachteten Impulse; $w = w_1 + \dots + w_k$; w_i = Wahrscheinlichkeit, daß ein zur Zeit $t = 0$ aktiver Atomkern im Intervall $i = (t_i, T_i)$ zerfällt und gezählt wird; bei exponentiellem Abfall ist

$$(14) \quad w_i = A g (e^{-\lambda t_i} - e^{-\lambda T_i}),$$

wo $4\pi A$ = Raumwinkel, unter dem der wirksame Raum des Zählrohrs vom Präparat aus erscheint, g = Ansprechwahrscheinlichkeit des Zählrohrs auf die betreffenden Teilchen.

1) F. Eggenberger u. G. Pólya, Ztschr. f. angew. Math. u. Mech. 3. S. 279. 1923; F. Eggenberger, Die Wahrscheinlichkeitsansteckung, Diss. Zürich, 1924.

2) J. Meixner, Journ. Lond. Math. Soc. 9. S. 6. 1934 (Fall IV).

3) Dies ist eine Verallgemeinerung der Newtonschen Formel der Wahrscheinlichkeitsrechnung, in die (13) für $k = 1$ übergeht.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung (13) könnte man nachprüfen, indem man für eine große Zahl von gleichen Präparaten mit je N bei Beginn der Messung aktiven Atomkernen unter denselben experimentellen Bedingungen die Impulszahlen n_1, \dots, n_k bestimmt.

Nun ist es aber, wie Schiff¹⁾, bemerkt hat, nicht möglich zwei Präparate mit genau gleicher Zahl von aktiven Kernen herzustellen. Geschieht z. B. die Aktivierung durch einen konstanten Strom von α -Teilchen, oder Neutronen usw., so muß man immer beachten, daß dieser Strom im oben definierten Sinne nur „im Mittel“ konstant ist, daß also bei konstanten Bedingungen und bei gleicher Bestrahlungsdauer die erzeugten Aktivitäten nur im Mittel einander gleich sind. Genau gesagt ist die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Zahl von aktiven Atomkernen immer durch die Poissonsche Verteilung gegeben. Wir haben also für jedes N nur eine bestimmte Wahrscheinlichkeit $\frac{\bar{N}^N}{N!} e^{-\bar{N}}$, wenn \bar{N} die mittlere Aktivierung ist, und (13) muß über diese Verteilung gemittelt werden:

$$(15) \quad \bar{w} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\bar{N}^N}{N!} e^{-\bar{N}} w(N, \lambda; n_1, \dots, n_k) = \prod_{i=1}^k \frac{(\bar{N} w_i)^{n_i}}{n_i!} e^{-\bar{N} w_i}.$$

\bar{w} ist also die Wahrscheinlichkeit, daß bei gegebener mittlerer Aktivierung \bar{N} die Impulszahlen n_1, \dots, n_k beobachtet werden. Sie ist ein Produkt Poissonscher Verteilungen; daher sind die Mittelwerte und mittleren Schwankungsquadrate

$$(16) \quad \bar{n}_i = \bar{N} w_i, \quad \overline{\delta n_i \delta n_j} = \bar{N} w_i = \bar{n}_i \text{ für } i = j, = 0 \text{ für } i \neq j.$$

Bestimmt man umgekehrt aus den Zahlen n_1, \dots, n_k die Zerfallskonstante und die Anfangsaktivität, so interessiert nicht die Zahl der anfangs aktiven Atomkerne in einem bestimmten Präparat, sondern nur der Mittelwert \bar{N} über viele auf dieselbe Weise hergestellte Präparate. Die Wahrscheinlichkeit $W(\bar{N}, \lambda; n_1, \dots, n_k)$, daß \bar{N} und λ in einem Bereich $d\bar{N}, d\lambda$ liegen, ist, abgesehen von der Normierung der Gesamtwahrscheinlichkeit auf 1, bei großen Werten der n_i durch (15) gegeben; denn die a -priori-Wahrscheinlichkeit $w_a(\bar{N}, \lambda)$ kann bei großen n_i als konstant angesetzt werden (dabei ist angenommen, daß kein Vorversuch gemacht ist, bzw. daß die Ergebnisse eines orientierenden Vorversuchs nicht benützt werden; ihre Benützung würde die mittleren Fehler von \bar{N} und λ natürlich verkleinern).

Für große n_i nähert sich (15) als Funktion von \bar{N} und λ einer Gaußschen Verteilung. Die Mittelwerte und mittleren Fehler von \bar{N}

1) L. I. Schiff, a. a. O.

und λ lassen sich aus dem Maximum und der Breite der Gauss-schen Verteilung durch Differentiationen bestimmen. Werden jedoch genau so viele Intervalle ausgezählt, als Unbekannte zu bestimmen sind (in diesem Fall zwei, nämlich \bar{N} und λ), so wendet man die am Ende dieses Paragraphen angegebene einfachere Methode an. —

Auch die Überlagerung von mehreren verschiedenartigen aktiven Präparaten führt zu einer entsprechenden Formel wie (15). Wir führen die Ableitung für zwei aktive Präparate durch. Seien M und N die Zahlen der bei Beginn der Messung aktiven Kerne in beiden Präparaten; v_i bzw. w_i die Wahrscheinlichkeiten, daß ein zur Zeit $t = 0$ aktiver Kern des einen bzw. anderen Präparats im Intervall $i = (t_i, T_i)$ im Zählrohr einen Impuls auslöst. Die Wahrscheinlichkeit, daß in den Intervallen 1, 2, ..., k nun n_1, \dots, n_k Impulse gemessen werden, ergibt sich durch Faltung zweier Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Gestalt (13)

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} w(M, N; \lambda_1, \lambda_2; n_1, n_2, \dots, n_k) \\ = \sum_{p_i + q_i = n_i} w(M, \lambda_1; p_1, \dots, p_k) \cdot w(N, \lambda_2; q_1, \dots, q_k). \end{array} \right.$$

Sind für M und N wieder nur Wahrscheinlichkeiten bekannt gemäß der Poissonschen Verteilung mit den Mittelwerten \bar{M} und \bar{N} , so entsteht aus (17) nach Multiplikation mit $\frac{\bar{M}^M}{M!} e^{-\bar{M}}$ und $\frac{\bar{N}^N}{N!} e^{-\bar{N}}$ und nach Ausführung der Summationen über $M, N, p_i + q_i = n_i$ als Verallgemeinerung von (14)

$$(18) \quad w(\bar{M}, \bar{N}; \lambda_1, \lambda_2; n_1, \dots, n_k) = \prod_{i=1}^k \frac{(\bar{M} v_i + \bar{N} w_i)^{n_i}}{n_i!} e^{-(\bar{M} v_i + \bar{N} w_i)}.$$

$\bar{M} v_i + \bar{N} w_i$ bedeutet also die mittlere Zahl von Teilchen, die von beiden Präparaten zusammen im Intervall i einen Impuls auslösen. Wir bezeichnen sie mit N_i . Die Verallgemeinerung von (18) auf eine Überlagerung von beliebig vielen Präparaten ist nunmehr augenscheinlich. Ist N_i die Summe der mittleren Teilchenzahlen, die von den einzelnen Präparaten im Intervall i einen Impuls auslösen, so ist die Wahrscheinlichkeit für n_1, \dots, n_k Impulse in den Intervallen 1, ..., k gegeben durch das Produkt Poissonscher Verteilungen

$$(19) \quad \prod_{i=1}^k \frac{N_i^{n_i}}{n_i!} e^{-N_i}.$$

Die N_i sind bekannte Funktionen der Aktivitäten, Zerfallskonstanten, Nulleffekte. Z. B. ist für die Überlagerung zweier exponentiell abfallender Präparate mit den Zerfallskonstanten λ_1

und λ_2 und den mittleren Aktivitäten \bar{M} und \bar{N} und eines konstanten Effekts von Z Impulsen in der Zeiteinheit

$$(20) \quad N_i = M'(e^{-\lambda_1 t_i} - e^{-\lambda_1 T_i}) + N'(e^{-\lambda_2 t_i} - e^{-\lambda_2 T_i}) + Z(T_i - t_i).$$

Darin bedeuten $M' = A_1 g_1 \bar{M}$, $N' = A_2 g_2 \bar{N}$; $4\pi A_1$ bzw. $4\pi A_2$ sind die Raumwinkel, unter denen der wirksame Raum des Zählrohrs von den beiden Präparaten aus erscheint, g_1 und g_2 sind die Ansprechwahrscheinlichkeiten des Zählrohrs auf die von den beiden Präparaten ausgesandten Teilchen.

Für eine Bestimmung der in den N_i enthaltenen Parameter reicht es aus, genau so viele Intervalle auszuzählen als die Zahl der Parameter beträgt. Diese Parameter seien jetzt mit x_1, x_2, \dots, x_k bezeichnet. Wir müssen nur voraussetzen, daß sich die Gleichungen

$$(21) \quad N_i = N_i(x_1, \dots, x_k), \quad i = 1, \dots, k$$

nach den x_j auflösen lassen. Das wird dann nicht der Fall sein, wenn z. B. zwei Zerfallskonstanten einander gleich sind, oder wenn mehrere konstante Effekte überlagert sind. Dann läßt sich nur die Summe dieser Effekte, also etwa die Summe der Aktivitäten der Präparate mit gleicher Zerfallskonstanten bestimmen.

Die Bestimmung der x_j und ihrer mittleren Fehler aus den n_1, \dots, n_k führen wir in zwei Schritten durch. Wir bestimmen aus den gemessenen n_i erst die N_i und ihre mittleren Fehler. Da es sich hier um Poissonsche Verteilungen in jedem Intervall handelt, so sind die Ergebnisse von (8) direkt anwendbar, und es folgt

$$(22) \quad \bar{N}_i = n_i, \quad \overline{\delta N_i^2} = n_i; \quad \overline{\delta N_i \delta N_j} = 0 \text{ für } i \neq j; \quad i, j = 1, \dots, k.$$

Dabei haben wir überall $n_i + 1$ durch n_i ersetzt, weil wir wieder annehmen, daß die $n_i \gg 1$.

Wir denken uns nun die Gl. (21) nach den x_i aufgelöst

$$(23) \quad x_j = x_j(N_1, \dots, N_k), \quad j = 1, \dots, k.$$

Daraus folgt

$$(24) \quad \bar{x}_j = x_j(\bar{N}_1, \dots, \bar{N}_k) = x_j(n_1, \dots, n_k);$$

ferner gilt wegen

$$(25) \quad \delta x_j = \sum_{i=1}^k \frac{\partial x_j}{\partial N_i} \delta N_i$$

und wegen (22)

$$(26) \quad \overline{\delta x_j \delta x_i} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial x_j}{\partial N_i} \frac{\partial x_i}{\partial N_i} \right)_{N_i = \bar{N}_i} n_i = \sum_{i=1}^k \frac{\partial x_j}{\partial n_i} \frac{\partial x_i}{\partial n_i} n_i.$$

§ 4. Beispiele

A. Exponentieller Zerfall eines einheitlichen Präparats mit inaktivem Folgeprodukt. Zur Bestimmung der beiden Parameter $x_1 = \bar{N}$ (mittlere Zahl von aktiven Kernen zur Zeit $t = 0$) und $x_2 = \lambda$ (Zerfallskonstante), genügt es, zwei Intervalle (t_1, T_1) und (t_2, T_2) auszuzählen ($0 \leq t_1 < T_1 \leq t_2 < T$). Dann berechnen sich wegen (24) und (21) \bar{N} und λ aus den Gleichungen

$$(27) \quad n_i = \bar{N} w_i(\lambda) = \bar{N} Ag(e^{-\lambda t_i} - e^{-\lambda T_i}); \quad i = 1, 2.$$

Aus diesen beiden Gleichungen werden die $\frac{\partial x_j}{\partial n_i}$, d. h. $\frac{\partial \bar{N}}{\partial n_i}$ und $\frac{\partial \lambda}{\partial n_i}$ berechnet und in (26) eingesetzt. Es ergibt sich dann allgemein

$$(28) \quad \frac{\partial \bar{\lambda}^2}{\partial \lambda^2} = \frac{w_1 w_2 (w_1 + w_2)}{\bar{N} (w_1' w_2 - w_2' w_1)^2}; \quad \frac{\partial \bar{N}^2}{\partial N^2} = \bar{N} \cdot \frac{w_2 w_1'^2 + w_1 w_2'^2}{(w_1' w_2 - w_2' w_1)^2},$$

worin $w_i' = \frac{\partial w_i}{\partial \lambda}$.

Spezialfälle.

I. $t_1 = 0$, $T_1 = t_2 (= t$ gesetzt), $T_2 = \infty$. Dann wird

$$(29) \quad \lambda = \frac{1}{t} \lg \frac{n_1 + n_2}{n_2}; \quad Ag \bar{N} = n_1 + n_2.$$

$$(30) \quad \frac{\partial \bar{\lambda}^2}{\partial \lambda^2} = \frac{1}{Ag \bar{N}} \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda^2 t^2} = \frac{1}{Ag \bar{N}} \varphi(\lambda t); \quad \frac{\partial \bar{N}^2}{\partial N^2} = \frac{\bar{N}}{Ag}.$$

$\varphi(\lambda t)$ ist in Tab. 1 für verschiedene Werte von λt angegeben. Am günstigsten ist die Wahl $\lambda t = 1,594$, d. h. $t = 0,627$ mal der mittleren Lebensdauer. Die Genauigkeit von \bar{N} hängt natürlich in diesem Fall nicht von t ab, sondern nur von der Gesamtzahl der in $(0, \infty)$ gezählten Impulse.

II. $t_1 = 0$, $T_2 - t_2 = T_1$; d. h. zwei gleichlange, aber im allgemeinen nicht anschließende Intervalle $(0, T_1)$ und $(t_2, t_2 + T_1)$. Wir bezeichnen die der Kürze halber mit $(0, T)$ und $(t, t + T)$; $t \leq T$; dann ist

$$(31) \quad \lambda = \frac{1}{t} \lg \frac{n_1}{n_2}; \quad Ag \bar{N} = \frac{n_1}{1 - e^{-\lambda T}},$$

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\lambda}^2}{\partial \lambda^2} &= \frac{1}{\bar{N} Ag} \frac{e^{\lambda t} + 1}{\lambda^2 t^2 (1 - e^{-\lambda T})} = \frac{1}{n_1} \psi_1(\lambda t); \\ \frac{\partial \bar{N}^2}{\partial N^2} &= \frac{\bar{N}}{Ag} \frac{\left(\frac{T}{t}\right)^2 \cdot e^{\lambda t - 2\lambda T} + \left[1 - \left(1 + \frac{T}{t}\right) e^{-\lambda t}\right]^2}{[1 - e^{-\lambda T}]^3}. \end{aligned} \right.$$

Sind die beiden Intervalle zeitlich nicht getrennt ($t = T$), so vereinfachen sich die Formeln (32) zu

$$(33) \quad \begin{cases} \frac{\delta \lambda^2}{\lambda^2} = \frac{1}{Ag \bar{N}} \frac{e^{\lambda t} + 1}{\lambda^2 t^2 (1 - e^{-\lambda t})} = \frac{1}{Ag \bar{N}} \cdot \psi_2(\lambda t), \\ \frac{\delta N^2}{Ag} = \frac{\bar{N}}{Ag} \cdot \frac{1 - 3e^{-\lambda t} + 4e^{-2\lambda t}}{(1 - e^{-\lambda t})^3} = \frac{\bar{N}}{Ag} \psi_3(\lambda t). \end{cases}$$

ψ_1, ψ_2, ψ_3 sind aus Tab. 1 zu entnehmen.

Tabelle 1

u	$\varphi(u)$	$\psi_1(u)$	$\psi_2(u)$	$\psi_3(u)$
0,8	1,91	5,04	9,15	2,75
1,0	1,72	3,72	5,88	1,73
1,2	1,61	3,00	4,29	1,35
1,4	1,56	2,58	3,42	1,18
1,6	1,54	2,33	2,91	1,10
1,8	1,56	2,18	2,61	1,055
2,0	1,60	2,10	2,43	1,032
2,2	1,66	2,07	2,33	1,019
2,4	1,74	2,09	2,30	1,012
2,6	1,84	2,14	2,31	1,007
2,8	1,97	2,23	2,37	1,005
3,0	2,12	2,34	2,47	1,003
3,5	2,62	2,79	2,87	1,001
4,0	3,35	3,48	3,54	1,000

Der Fall gleichlanger, zeitlich getrennter Intervalle findet Anwendung bei langsam abklingenden Präparaten, bei denen die Messung unterbrochen und nach mehreren Stunden oder Tagen wieder fortgesetzt wird.

Der relative Fehler in λ wird im Fall zeitlich getrennter Intervalle bei festgehaltenem T am kleinsten für $\lambda t = 2,218$; bei nicht getrennten Intervallen ist die günstigste Intervalllänge durch $\lambda t = 2,419$ gegeben.

Wir bemerken an dieser Stelle noch, daß allgemein der relative mittlere Fehler der Zerfallskonstanten $\sqrt{\frac{\delta \lambda^2}{\lambda^2}}$ gleich dem relativen mittleren Fehler der Halbwertszeit, bzw. der mittleren Lebensdauer ist.

Während es bei einem „im Mittel“ konstanten Effekt nicht möglich ist, durch Unterteilung der Meßreihe die Genauigkeit des Mittelwerts zu verbessern (vgl. § 2), ist es beim eben behandelten Problem möglich, durch Unterteilung der Meßreihe den mittleren Fehler von λ zu verringern. Jedoch ist diese Verringerung nicht so groß, daß sie den dabei nötigen Mehraufwand bei Messung und

Rechnung immer rechtfertigen würde. Im günstigsten Fall, d. h. wenn man zu jedem der n Zählrohrimpulse im Intervall $(0, \infty)$ den Zeitpunkt t_i bestimmt, ist die mittlere Lebensdauer

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n} (t_1 + t_2 + \dots + t_n),$$

und der relative mittlere Fehler von λ

$$\sqrt{\frac{\delta \lambda^2}{\lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

(Wegen Einzelheiten zu dieser Methode verweisen wir auf die erwähnte Arbeit von Peierls.) Nach der Methode des Beispiels A I erhalten wir dagegen im günstigsten Fall einen nur um etwa 25% größeren mittleren Fehler.

B. Überlagerung eines exponentiellen Zerfalls und eines davon unabhängigen konstanten Effekts. Dieser Fall ist experimentell sehr häufig gegeben, da die Abfallskurve eines Präparats bei Messung im Zählrohr immer von einem konstanten Nulleffekt überlagert ist (Höhenstrahlung + Radioaktivität der Gebäudeteile und der Erde). Wir setzen den Nulleffekt als unbekannt voraus (der Fall eines bekannten Nulleffekts ist in den folgenden Überlegungen enthalten, wie unten gezeigt wird). Dann sind drei Größen zu bestimmen: \bar{N} und λ des Präparats, Z = mittlere Impulszahl des Nulleffekts in der Zeiteinheit. Dazu sind mindestens drei Intervalle auszuzählen. Wir nehmen drei Intervalle der Längen $l_i = T_i - t_i$. Dann bestimmen sich die Unbekannten aus den drei Gleichungen:

$$(34) \quad n_i = Ag \bar{N} (e^{-\lambda t_i} - e^{-\lambda T_i}) + Z (T_i - t_i).$$

Für die mittleren Fehler der Unbekannten ergeben sich ähnlich wie im Beispiel A die etwas komplizierteren Ausdrücke:

$$(35) \quad \overline{\delta \lambda^2} = \frac{D}{N^2} \sum n_i (w_j l_k - w_k l_j)^2,$$

$$(36) \quad \overline{\delta Z^2} = D \sum n_i (w_j w_k' - w_k w_j')^2,$$

$$(37) \quad \overline{\delta \bar{N}^2} = D \sum n_i (l_j w_k' - l_k w_j')^2,$$

wo i, j, k zyklische Indizes sind und

$$(38) \quad D^{-1} = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ w_1' & w_2' & w_3' \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix}^2.$$

Spezialfälle. I. $t_1 = 0, l_1 = l_2 = l_3 = l, t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = t$; d. h. drei gleichlange, durch gleiche Abstände getrennte Intervalle $(0, l), (t, t + l), (2t, 2t + l)$. Aus den Gl. (34) bis (38) folgt dann:

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{t} \lg \frac{n_1 - n_2}{n_2 - n_3}; \quad Ag\bar{N} = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 - 2n_2 + n_3)(1 - e^{-\lambda t})}, \\ Z &= \frac{1}{t} \frac{n_1 n_2 - n_3^2}{n_1 - 2n_2 + n_3}. \end{aligned} \right.$$

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\delta \lambda^2}{\lambda^2} &= \frac{1}{n_1 - n_2} \frac{e^{2\lambda t} + 4e^{\lambda t} + 1}{\lambda^2 t^2 (e^{\lambda t} - 1)} + \frac{2Zl}{(n_1 - n_2)^2} \cdot \frac{e^{3\lambda t} + e^{\lambda t} + 1}{\lambda^2 t^2} \\ &= \frac{1}{n_1 - n_2} \cdot \chi_1(\lambda t) + \frac{Zl}{(n_1 - n_2)^2} \cdot \chi_2(\lambda t). \end{aligned} \right.$$

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\delta(Zl)^2} &= (n_1 - n_2) \frac{e^{3\lambda t} + 4e^{2\lambda t} + e^{\lambda t}}{(e^{\lambda t} - 1)^5} + Zl \frac{e^{4\lambda t} + 4e^{2\lambda t} + 1}{(e^{\lambda t} - 1)^4} \\ &= (n_1 - n_2) \chi_3(\lambda t) + Zl \cdot \chi_4(\lambda t). \end{aligned} \right.$$

Der Ausdruck für $\delta \bar{N}^2$ ist etwas umständlich, wir geben ihn daher nur für den Fall anschließender Intervalle, d. h. $l = t$ an:

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\delta(Ag\bar{N})^2} &= Ag\bar{N} \cdot \frac{(1 - 5e^{-\lambda t} + 19e^{-2\lambda t} + 9e^{-3\lambda t})}{(1 - e^{-\lambda t})^5} \\ &\quad + \frac{Z}{\lambda} \cdot 6\lambda t \cdot \frac{1 + 3e^{-2\lambda t}}{(1 - e^{-\lambda t})^6} \\ &= Ag\bar{N} \cdot \chi_5(\lambda t) + \frac{Z}{\lambda} \cdot \chi_6(\lambda t). \end{aligned} \right.$$

\bar{N} selbst berechnet sich für $l = t$ einfacher aus

$$Ag\bar{N} = (n_1 - n_2)^3 (n_1 - 2n_2 + n_3)^{-2}.$$

(40) und (41) können für $l = t$ direkt benützt werden, wenn man Zl durch Zt ersetzt.

χ_1 bis χ_6 sind aus Tab. 2 zu entnehmen.

Tabelle 2

u	$\chi_1(u)$	$\chi_2(u)$	$\chi_3(u)$	$\chi_4(u)$	$\chi_5(u)$	$\chi_6(u)$
0,8	18,9	25,6	11,96	20,1	67,2	276
1,0	11,7	22,2	3,64	9,77	21,6	132
1,2	7,57	21,3	1,25	5,75	8,78	78,7
1,4	5,62	21,9	0,513	3,87	4,36	54,3
1,6	4,48	23,8	0,233	2,87	2,59	41,7
1,8	3,78	26,9	0,114	2,29	1,81	34,6
2,0	3,33	31,5	0,059	1,92	1,44	30,3
2,2	3,05	37,8	0,032	1,68	1,24	27,7
2,4	2,89	46,4	0,0182	1,51	1,14	26,1
2,6	2,80	57,9	0,0106	1,39	1,08	25,2
2,8	2,78	73,4	0,0063	1,30	1,05	24,8
3,0	2,82	94,3	0,0038	1,24	1,03	24,6
3,5	3,13	185	0,0012	1,13	1,010	25,3
4,0	3,73	380	0,0004	1,08	1,004	26,8

Für $l = t$ ist die Lage des Minimums von $\frac{\delta \lambda^2}{\lambda^2}$ noch unabhängig vom Verhältnis $\frac{Ag\bar{N}\lambda}{Z}$. Das Minimum liegt aber auf jeden Fall zwischen $\lambda t = 1,9$ und $\lambda t = 3,0$. Für $l \neq t$ liegt bei festem l das Minimum immer zwischen $\lambda t = 1,6$ und $\lambda t = 2,9$.

Die eben erwähnte Methode hat den Vorteil, daß der Nulleffekt Z nicht von vorneherein bekannt zu sein braucht. Sie läßt sich also anwenden, wenn man den Nulleffekt nicht unabhängig bestimmen kann, d. h. wenn man etwa eine kurzlebige Aktivität messen will, die von einer nicht abtrennbaren sehr langlebigen Aktivität und von einem natürlichen Nulleffekt überlagert ist. Z stellt dann die Summe dar aus dem natürlichen Nulleffekt Z_0 und aus der Impulszahl in der Zeiteinheit der während des Abfalls der kurzlebigen Aktivität praktisch konstanten langlebigen Aktivität. Die mittlere Impulszahl der langlebigen Aktivität ist dann $Z - Z_0$, ihr mittlerer Fehler $= \sqrt{\delta Z^2 + \delta Z_0^2}$, wo δZ^2 aus (41) zu entnehmen ist; Z_0 ist der ohne Präparat bestimmte natürliche Nulleffekt, δZ_0^2 ist das Quadrat des mittleren Fehlers des natürlichen Nulleffekts [vgl. § 2, insbesondere (8) und (10)].

Zahlenbeispiel: $t = l = 10$ min, $n_1 = 1200$, $n_2 = 400$, $n_3 = 240$. Dann folgt aus (39) $\lambda = 2,68 \cdot 10^{-3} \text{ sec}^{-1}$; $Ag\bar{N} = 1250$; $Zt = 200$. \bar{N} selbst kann nur bestimmt werden, wenn A und g bekannt sind; kommt es nur auf den Vergleich der Aktivität mit der eines anderen Präparates an, so genügt es, wenn man nur $Ag\bar{N}$ kennt. Da $\lambda t = 1,609$, so sind die Funktionen x_1 bis x_6 in (40), (41), (42) für dieses Argument aus der Tabelle zu entnehmen. Es ergibt sich $\lambda = (2,68 \pm 0,31) \cdot 10^{-3} \text{ sec}^{-1}$; $Zt = 200 \pm 28$; $Ag\bar{N} = 1250 \pm 108$.

II. $l_1 = l_2$, $l_3 = L$; $t_1 = 0$, $t_2 = t$, $\lambda t_3 \gg 1$. D. h. zwei zeitlich getrennte gleichlange Intervalle und ein drittes Intervall der Länge L , in dem der exponentielle Abfall bereits vollkommen abgeklungen ist. Man kann das auch auffassen als Bestimmung von \bar{N} und λ aus den beiden ersten Intervallen bei bekanntem Nulleffekt; dabei ist der Nulleffekt Z aus dem dritten Intervall bestimmt gedacht.

Aus den Gl. (34) folgt dann:

$$(43) \quad Z = \frac{n_3}{L}; \quad \lambda t = \lg \frac{n_1 - n_3 \frac{t}{L}}{n_2 - n_3 \frac{t}{L}}; \quad Ag\bar{N} = \frac{n_1 - Zt}{1 - e^{-\lambda t}}.$$

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\delta \lambda^2}{\lambda^2} &= \frac{1}{\bar{N} A g} \frac{e^{\lambda t} + 1}{\lambda^2 t^2 (1 - e^{-\lambda t})} + \frac{Z l}{(A g \bar{N})^2} \frac{1 + e^{2\lambda t}}{\lambda^2 t^2 (1 - e^{-\lambda t})^2} \\ &+ \frac{Z l^2}{(A g \bar{N})^2 L} \frac{(e^{\lambda t} - 1)^2}{\lambda^2 t^2 (1 - e^{-\lambda t})^2} = \frac{1}{n_1 - Z l} \psi_1(\lambda t) \\ &+ \frac{Z l}{(n_1 - Z l)^2} \varrho_1(\lambda t) + \frac{Z l^2}{L (n_1 - Z l)^2} \varrho_2(\lambda t). \end{aligned} \right.$$

$$(45) \quad \overline{\delta Z^2} = \frac{n^2}{L^2}.$$

$\delta \bar{N}^2$ geben wir auch hier nur für $l = t$ an.

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta (A g \bar{N})^2 &= A g \bar{N} \cdot \frac{1 - 3e^{-\lambda t} + 4e^{-2\lambda t}}{(1 - e^{-\lambda t})^3} \\ &+ \frac{Z}{\lambda} \cdot 2\lambda t \cdot \frac{1 - 2e^{-\lambda t} + 2e^{-2\lambda t}}{(1 - e^{-\lambda t})^4} + \frac{Z}{L \lambda^2} \frac{4\lambda^2 t^2}{(1 - e^{-\lambda t})^2} \\ &= A g \bar{N} \cdot \psi_3(\lambda t) + \frac{Z}{\lambda} \varrho_3(\lambda t) + \frac{Z}{L \lambda^2} \varrho_4(\lambda t). \end{aligned} \right.$$

\bar{N} berechnet sich dann einfacher statt aus (43) aus $A g \bar{N} = (n_1 - Z t)^2 (n_1 - n_2)^{-1}$.

ψ_1 und ψ_3 sind aus Tab. 1, ϱ_1 bis ϱ_4 aus Tab. 3 zu entnehmen.

Tabelle 3

u	$\varrho_1(u)$	$\varrho_2(u)$	$\varrho_3(u)$	$\varrho_4(u)$	u	$\varrho_1(u)$	$\varrho_2(u)$	$\varrho_3(u)$	$\varrho_4(u)$
0,8	9,30	2,35	8,79	8,44	2,2	17,0	13,3	5,65	24,5
1,0	8,39	2,95	6,70	10,01	2,4	21,3	17,4	5,86	27,9
1,2	8,35	3,74	5,83	11,8	2,6	27,0	23,0	6,09	31,6
1,4	8,90	4,76	5,46	13,8	2,8	34,6	30,4	6,38	35,6
1,6	9,97	6,10	5,35	16,1	3,0	44,9	40,5	6,66	39,9
1,8	11,6	7,87	5,37	18,6	3,5	89,6	84,2	7,45	52,1
2,0	13,9	10,21	5,48	21,4	4,0	186	180	8,30	66,4

Das Quadrat des mittleren Fehlers von λ [vgl. (44)] bzw. von \bar{N} [vgl. (46)] setzt sich also linear zusammen aus dem Beitrag, der für $Z = 0$ übrig bleiben würde [er ist identisch mit den Ausdrücken (32) bzw. (33)], aus einem Beitrag, der durch die Schwankung des Nulleffekts in den beiden ersten Intervallen bedingt wird und aus einem Beitrag, der durch den mittleren Fehler in der Bestimmung von Z entsteht und der gegen Null geht, wenn $L \rightarrow \infty$.

Das Minimum von $\delta \lambda^2 / \lambda^2$ liegt für $L \rightarrow \infty$ bei festem l zwischen $\lambda t = 1,1$ und $\lambda t = 2,2$; für $l = t$ und $L \rightarrow \infty$ liegt es zwischen $\lambda t = 1,5$ und $\lambda t = 2,4$. Für endliche $L > l$ verringern sich diese Werte etwas.

C. Überlagerung zweier exponentieller Zerfälle und eines konstanten Nulleffekts. Wir beschränken uns hier auf die Berechnung

der Zerfallskonstanten und ihrer mittleren Fehler und geben nur die Endformeln für zwei Beispiele an.

I. Zur Bestimmung der beiden Zerfallskonstanten λ_1 und λ_2 zählen wir vier Intervalle mit der gleichen Länge l aus. Die Anfangspunkte benachbarter Intervalle sollen den gleichen Abstand t haben. Die Impulszahlen seien n_1, n_2, n_3, n_4 . Der Nulleffekt Z werde unabhängig bestimmt durch eine Messung über eine Zeit L . Wir führen noch die Impulszahlen v_i nach Abzug des Nulleffekts ein:

$$(47) \quad v_i = n_i - Zl; \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$(48) \quad q_1 = e^{-\lambda_1 t}, \quad q_2 = e^{-\lambda_2 t};$$

$$(49) \quad B_1 = \frac{v_3 - v_1 q_2}{q_1 - q_2}, \quad B_2 = \frac{v_2 - v_1 q_1}{q_2 - q_1}.$$

B_1 und B_2 sind die wahrscheinlichen Impulszahlen, die von den einzelnen Aktivitäten im ersten Intervall ausgelöst werden.

q_1 und q_2 berechnen sich dann als die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(50) \quad (v_1 v_3 - v_2^2) q^2 - (v_1 v_4 - v_2 v_3) q + (v_2 v_4 - v_3^2) = 0.$$

Aus (48) ergeben sich dann die Zerfallskonstanten. Der mittlere Fehler von λ_1 ergibt sich aus

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} B_1^2 q_1^2 (q_1 - q_2)^4 t^2 \delta \lambda_1^2 &= n_1 q_1^2 q_2^4 \\ &+ n_2 q_2^2 (q_2 + 2q_1)^2 + n_3 (q_1 + 2q_2)^2 + n_4 \\ &+ \frac{Zl^2}{L} (1 - q_1)^2 (1 - q_2)^4. \end{aligned} \right.$$

Der mittlere Fehler von λ_2 ergibt sich aus (51) nach Vertauschung der Indizes 1 und 2 in den B, q, λ .

Die Bestimmung der Zerfallskonstanten nach dieser Methode scheint besonders angebracht, wenn sie sich nur wenig unterscheiden. t wird man mindestens so groß wählen, wie das Reziproke der größeren der beiden Zerfallskonstanten.

II. Sind die beiden Zerfallskonstanten sehr verschieden, so wird man besser anders vorgehen. Man kann es gewöhnlich durch geeignete Anregung so einrichten, daß nur eine der beiden Aktivitäten auftritt, d. h. daß die andere vernachlässigbar klein wird. Die Zerfallskonstante λ_1 dieser Aktivität kann nach der Methode B I. oder B II. mit einem gewissen mittleren Fehler bestimmt werden. Durch andere Art der Anregung mögen beide Aktivitäten, zusammen mit einem Nulleffekt, auftreten. Dann sind drei Größen unbekannt, die Stärken der beiden Aktivitäten (die Aktivität 1 wird ja jetzt eine andere Stärke haben als im ersten Versuch) und die Zerfallskonstante λ_2 . Dementsprechend sind drei Intervalle auszuzählen.

Wir nehmen sie so wie im Beispiel B I. an. Seien die Impulszahlen n_1, n_2, n_3 . Dann ist

$$(52) \quad q_2 = \frac{n_3 - Zl - q_1(n_2 - Zl)}{n_2 - Zl - q_1(n_1 - Zl)}$$

und

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} & [n_3 - Zl - q_1(n_2 - Zl)]^2 t^2 \delta \lambda_2^2 \\ & = [n_1 q_1^2 q_2^2 + n_2 (q_1 + q_2)^2 + n_3] \\ & + [n_3 - Zl - q_2(n_2 - Zl)]^2 t^2 \delta \lambda_1^2 \\ & + (1 - q_1)^2 (1 - q_2)^2 l^2 \delta Z^2. \end{aligned} \right.$$

D. Messung einer Zerfallskonstanten durch Variation der Anregung. Durch irgendeinen Prozeß mögen in der Zeiteinheit im Mittel P Atomkerne eines Präparats aktiviert werden. Diese aktivierten Kerne sollen mit einer Zerfallskonstanten λ ohne aktives Folgeprodukt zerfallen. Die Wahrscheinlichkeit, daß N Kerne in der Zeit T aktiviert werden und daß n von diesen zur Zeit T noch nicht wieder zerfallen sind, ist dann

$$(54) \quad \frac{(PT)^N}{N!} e^{-PT} \cdot \binom{N}{n} \left(\frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda T} \right)^n \left(1 - \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda T} \right)^{N-n};$$

denn die Wahrscheinlichkeit, daß ein irgendwann in $(0, T)$ aktivierter Kern zur Zeit T noch nicht zerfallen ist, ist $\frac{(1 - e^{-\lambda T})}{\lambda T}$.

Summiert man (54) über alle N , so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, daß bei beliebiger Zahl von aktivierten Kernen zur Zeit T noch n aktivierte Kerne vorhanden sind. Sie ist eine Poissonsche Verteilung mit dem Mittelwert

$$(55) \quad \bar{n} = \frac{P}{\lambda} (1 - e^{-\lambda T}).$$

Dieser Mittelwert ergibt sich auch bei kontinuierlicher Rechnung, d. h. als Lösung der Differentialgleichung

$$(56) \quad dn = P dT - \lambda n dT$$

mit der Anfangsbedingung $n(0) = 0$.

Sei nun das Präparat dreimal verschieden lang aktiviert (Zeiten T_1, T_2, T_3). Zwischen Aktivierung und Messung mit dem Zählrohr vergehe die Zeit t_0 . Die Messung mit dem Zählrohr sei jedesmal über die gleiche Zeit t erstreckt und ergebe einschließlich einem Nulleffekt Zt die Impulszahlen n_1, n_2, n_3 .

Nehmen wir noch speziell an, daß $T_1 = T$, $T_2 = 2T$, $T_3 = 3T$, so folgt aus den Überlegungen am Ende von § 3, daß sich die Zerfallskonstante λ aus den Gleichungen

$$(57) \quad n_i = \frac{PAg}{\lambda} (1 - e^{-i\lambda T}) e^{-\lambda t_0} (1 - e^{-\lambda t}) + Zt, \quad i = 1, 2, 3$$

bestimmt zu

$$(58) \quad \lambda = \frac{1}{T} \lg \frac{n_2 - n_1}{n_2 - n_3}.$$

Ihr mittlerer Fehler ergibt sich aus

$$(59) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\delta \lambda^2}{\lambda^2} &= \frac{1}{n_2 - n_1} \cdot \frac{1 + 5e^{\lambda T} + 4e^{2\lambda T} + 2e^{3\lambda T}}{\lambda^2 T^2} \\ &+ \frac{2Zt}{(n_2 - n_1)^2} \cdot \frac{1 + e^{\lambda T} + e^{2\lambda T}}{\lambda^2 T^2}. \end{aligned} \right.$$

Diese Methode ist auch dann anwendbar, wenn die zu untersuchende Aktivität von einer kurzlebigen Aktivität überlagert wird, die im Intervall $(0, T)$ bereits praktisch bis zur Sättigung angeregt ist. Dann ergibt sich einfach in den drei Gl. (57) ein gleicher Zusatzterm, der in den Ausdruck Zt hineingenommen werden kann; dann ändert sich an der übrigen Rechnung nichts, außer daß Zt die Bedeutung hat: Summe aus Nulleffekt in $(t_0, t_0 + t)$ und Abfall der kurzlebigen Aktivität im selben Intervall.

§ 5. Wiederholung der Messungen

Wird eine Messung x mal unter genau den gleichen experimentellen Bedingungen wiederholt (gleiche Aktivierung, gleiche Anordnung der Meßintervalle, gleiche räumliche Anordnung von Präparat und Zählrohr usw.), so werden die mittleren Fehler der einzelnen Messung um den Faktor $1/\sqrt{x}$ verkleinert. Man sieht das deutlich an den in § 4 behandelten Beispielen; man braucht nur die Impulszahlen entsprechender Intervalle über alle Messungen zu addieren und die Formeln des § 4 auf diese Summen anzuwenden. Andererseits kann man zeigen, ähnlich wie in § 2 bei den im Mittel konstanten Effekten, daß es nur ankommt auf die Summe der Messungen und daß man durch Berücksichtigung der Ergebnisse der einzelnen Messungen den mittleren Fehler nicht kleiner machen kann; das gilt auch dann, wenn man mehr Intervalle auszählt, als zur Bestimmung der Unbekannten nötig ist.

Demgegenüber ist jedoch zu bemerken, daß bei Überlagerung mehrerer Effekte aus den einzelnen Messungen mehr geschlossen werden kann als aus der Summe der Messungen, sobald die Komponenten des Gesamteffekts in wechselndem Verhältnis in die einzelnen Messungen eingehen.

Gießen, Institut für theoretische Physik, 18. September 1937.

(Eingegangen 21. September 1937)

Über das Verhalten eines Elektronenbündels einheitlicher Geschwindigkeit nach der Durchdringung einer dünnen Folie

Von F. Kirchner

(Mit 3 Abbildungen)

Vor einigen Jahren habe ich gezeigt, daß man die Elektroneninterferenzen in einem Kristallgitter sehr gut zur spektralen Zerlegung von Elektronenstrahlen benutzen kann, die z. B. eine Aluminiumfolie passiert haben¹⁾. Die hierzu benutzte Versuchsanordnung ist



Abb. 1. Versuchsanordnung zur kristallspektroskopischen Untersuchung der durch eine Aluminiumfolie hindurchgegangenen Strahlung

aus Abb. 1 ersichtlich. Von dem Glühfaden F gingen Elektronenstrahlen einheitlicher Geschwindigkeit aus. Unmittelbar hinter der engen Blende B_1 wurde ein Stück Aluminiumfolie von $1 \cdot 10^{-3}$ cm Dicke angebracht. Beim Durchdringen der Folie werden die Kathodenstrahlen stark zerstreut, wie in der Abbildung angedeutet ist. Aus diesem diffusen Bündel, das aber von einer eng begrenzten Stelle der Aluminiumfolie herkommt, wurde nun mit den Blenden B_2 und B_3 wieder ein schmales Bündel ausgesondert, das dieselbe Richtung hatte, wie der ursprüngliche Strahl. Das eng ausgeblendete Bündel durchsetzte unmittelbar hinter B_3 ein dünnes Glimmerblättchen und wurde hier in der bekannten Weise im Kristallgitter gebeugt. Das Interferenzbild wurde auf der photographischen Platte P festgehalten. Das Ergebnis der Versuche war, daß der Elektronenstrahl nach dem Durchgang durch die Folie bei der hier verwendeten Schichtdicke keineswegs mehr eine annähernd einheitliche Geschwindigkeit besitzt, wie man es nach den älteren Messungen der Geschwindigkeitsverluste von Kathodenstrahlen früher annahm; vielmehr war jeder einzelne Streustrahl des Interferenzbildes in P in ein ganzes Spektrum

1) F. Kirchner, Ann. d. Phys. [5] 11. S. 756. 1931.

auseinandergezogen, das sich über einen Voltgeschwindigkeitsbereich von etwa 50—30 kV erstreckte. Die Hauptintensität war auf der kurzwelligen Seite des Spektrums konzentriert; nach langen Wellen, also kleineren Elektronengeschwindigkeiten hin fiel die Intensität beträchtlich flacher ab wie auf der kurzwelligen Seite. Das Intensitätsmaximum war nach größeren Wellenlängen (d. h. kleineren Geschwindigkeiten!) verschoben, in Übereinstimmung mit den älteren Geschwindigkeitsverlustmessungen mittels magnetischer Ablenkung.

Ähnliche Versuche mit positivem Ergebnis sind kürzlich von den Herren A. Becker und E. Kipphan¹⁾ durchgeführt worden.

Dagegen teilen die Herren J. J. Trillat und A. Hautot in einem soeben erschienenen Heft dieser Zeitschrift mit²⁾, daß sie bei einer Wiederholung der oben beschriebenen Versuche mit noch feiner ausgeblendetem Elektronenstrahl zu einem völlig entgegengesetzten Resultat gekommen sind: „Bei gleichwelchen Versuchsbedingungen erhielten wir immer dasselbe Resultat: das Beugungsdiagramm nach Durchstrahlung des absorbierenden Blattes ist *absolut identisch* dem, welches ohne die absorbierende Zwischenfolie erhalten wurde. Die Schärfe der Ringe war dieselbe und ihre Stellung blieb unverändert unter Berücksichtigung des Experimentalfehlers, der weniger als 0,5% betrug. Die Abb. 2 und 3 geben zwei Beispiele darüber. Diese Versuche beweisen, daß derjenige Teil des Elektronenbündels, der das absorbierende Blatt durchdrungen hat, ohne jegliche Abweichung zu erleiden, monokinetisch bleibt und die ursprüngliche Geschwindigkeit beibehält.“

Die Herren Trillat und Hautot schließen aus ihren Beobachtungen, daß „jener Teil des Elektronenbündels, der nach Durchdringung eines absorbierenden Blattes die ursprüngliche Richtung beibehält, auch die ursprüngliche Geschwindigkeit nicht verändert, und daß nur jene Elektronen, die eine Abweichung aufweisen, einen Geschwindigkeitsverlust erleiden können.“ Das abweichende Ergebnis von Becker und Kipphan wäre nach ihrer Ansicht dadurch zu erklären, daß diese Herren mit einem zu breiten Elektronenbündel gearbeitet hätten.

Die Schlüsse, die die Herren Trillat und Hautot aus ihren Beobachtungen gezogen haben, sind aber nach meiner Ansicht unzutreffend. Zunächst muß auf einen wesentlichen Unterschied in ihren Versuchsbedingungen gegenüber den von mir damals verwendeten Versuchsbedingungen hingewiesen werden. Während ich damals eine

1) A. Becker u. E. Kipphan, Ann. d. Phys. [5] 28. S. 465. 1937.

2) J. J. Trillat u. A. Hautot, Ann. d. Phys. [5] 30. S. 167. 1937.

Foliendicke von $10\ \mu$ benutzte, haben die Herren Trillat und Hautot mit einer Foliendicke von nur $1\ \mu$ und darunter gearbeitet. Da der Geschwindigkeitsverlust ebenso wie die mit ihm verbundene Verbreiterung des Geschwindigkeitsbereichs bei geringeren Dicken sehr klein wird, konnte er bei den von ihnen benutzten geringen Dicken wohl der Beobachtung entgehen¹⁾. Hierauf werde ich unten zurückkommen. Aber auch die Begründung, die die Herren Trillat und Hautot für ihr negatives Ergebnis anführen, ist mit den sonstigen Erfahrungen über den Durchgang von Kathodenstrahlen durch sehr dünne Schichten nicht im Einklang. Ich habe im Jahre 1932 die Intensitätsabnahme, die ein eng ausgeblendetes Elektronenbündel von dem hier in Frage kommenden Geschwindigkeitsbereich ($\beta = 0,3-0,45$) beim Durchgang durch dünne Glimmerblättchen erleidet, elektrometrisch gemessen und dabei einen Schwächungskoeffizienten von rund $2,2 \cdot 10^5$ gefunden²⁾ (gegenüber einem aus den Lenardschen Intensitätsmessungen an breiteren Elektronenbündeln sich ergebenden Absorptionskoeffizienten von etwa $4 \cdot 10^3$). Aus dem bekannten Exponentialgesetz $I = I_0 \cdot e^{-\alpha d}$, das in dem damals untersuchten Dickenbereich mit guter Annäherung erfüllt war, ergibt sich daher mit $\alpha = 2,2 \cdot 10^5$, daß jener Teil des Elektronenbündels, der nach der Durchdringung einer Glimmerfolie von $1\ \mu$ Dicke die ursprüngliche Richtung unverändert beibehalten hat, nur noch den $3 \cdot 10^9$ ten Teil der Anfangsintensität enthält und daher bei den verwendeten Versuchsbedingungen überhaupt nicht mehr beobachtet werden kann. Dasselbe gilt für eine Aluminiumfolie von gleicher Dicke, wo der entsprechende Bruchteil höchstens um 1—2 Zehnerpotenzen von der für die Glimmerfolie ermittelten verschieden sein kann. Die Folgerung, daß der ursprüngliche Primärstrahl nach dem Durchgang durch eine $1\ \mu$ dicke Folie bei der hier in Frage kommenden Elektronengeschwindigkeit überhaupt nicht mehr beobachtet werden kann, ist im Einklang mit der Tatsache, auf die ich in der oben schon zitierten Arbeit von 1931³⁾ hingewiesen habe: in dem Interferenzbild, das man bei der Durchstrahlung eines $0,7\ \mu$ dicken Glimmerblättchens erhält, (a. a. O., Abb. 4) ist der Primärstrahl überhaupt nicht mehr zu erkennen; das ganze Interferenzbild ist lediglich durch diffus zerstreute Strahlen verursacht. Mit anderen

1) Bei genauer Betrachtung der Abb. 2 der Herren Trillat und Hautot scheinen die äußeren Interferenzringe (220 und 311) im unteren Teile der Abbildung doch einen etwas größeren Durchmesser zu haben, als im oberen Teil; dies würde in Übereinstimmung mit unserem Befund sein. (Vgl. Abb. 2.)

2) F. Kirchner, Ann. d. Phys. [5] 13. S. 44. 1932.

3) Ann. d. Phys. [5] 11. S. 741. 1931, Tafel 1, Abb. 4.

Worten: *Schon bei dieser Absorberdicke ist die Zahl derjenigen Elektronen, die nach mehrfachen, innerhalb der Folie erlittenen kleinen Richtungsänderungen die Folie wieder in der Richtung des Primärstrahls verlassen, ganz beträchtlich viel größer, als die Zahl derjenigen Elektronen, die überhaupt keine Richtungsänderung erlitten haben.* Man beobachtet daher auch in der ursprünglichen Richtung des Primärstrahls ganz überwiegend nur die diffus zerstreuten Strahlen, die sich von den benachbarten Strahlen in bezug auf ihren Geschwindigkeitsverlust und die damit verbundene Verbreiterung des Geschwindigkeitsbereichs nicht merklich unterscheiden können. Diejenigen Elektronen, die die absorbierende Folie in der Richtung des Primärstrahls verlassen, müssen daher auch bei den von den Herren Trillat und Hautot verwendeten Absorberdicken ebenso wie die in etwas anderer Richtung austretenden Elektronen einen Geschwindigkeitsverlust erlitten haben, der der durchlaufenen Absorberdicke entspricht.

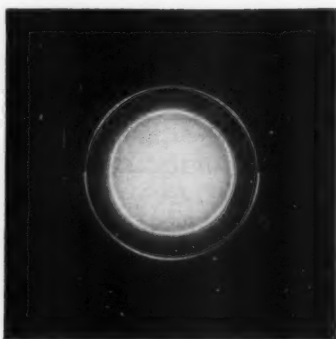


Abb. 2. Oben: Elektroneninterferenzen an einer dünnen Steinsalzschrift; unten: Dasselbe nach Durchstrahlung einer $1\ \mu$ dicken Aluminiumfolie

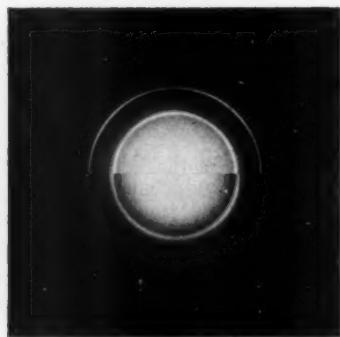


Abb. 3. Oben: Elektroneninterferenzen an einer dünnen Steinsalzschrift; unten: Dasselbe nach Durchstrahlung einer $3,2\ \mu$ dicken Glimmerfolie

Herr cand. phys. Boochs hat deshalb auf meine Bitte im hiesigen Institut den Versuch mit einer $1\ \mu$ dicken Aluminiumfolie, also mit der von den Herren Trillat und Hautot verwendeten Foliendicke, wiederholt. Der benutzte Elektronenstrahl war durch zwei Blenden von $0,1\ \text{mm}$ Durchmesser im Abstand von $30\ \text{cm}$ sehr fein ausgeblendet; die Beschleunigungsspannung betrug $45\ \text{kV}$. Zur spektralen Analyse des durch die Aluminiumfolie hindurchgegangenen Bündels wurden dünne Silber- und Steinsalzschriften verwendet. Das Ergebnis

ist aus der Abb. 2 ersichtlich: der Geschwindigkeitsverlust, den die Elektronenstrahlen infolge des Durchgangs durch die $1\ \mu$ dicke Aluminiumfolie erlitten haben, ist an der entsprechenden Vergrößerung des Durchmessers der Interferenzringe deutlich zu erkennen. Die gemessene Wellenlängenvergrößerung (und damit der Geschwindigkeitsverlust) beträgt etwa 1% ; diesem Zahlenwert ist allerdings kein großes Gewicht beizulegen, weil keine Sicherheit dafür besteht, daß eine so dünne Aluminiumfolie überall gleichmäßig dick ist. Wir haben es daher vorgezogen, einige weitere Versuche mit dünnen Glimmerblättchen zu machen, deren Dicke ganz gleichmäßig ist und sich mittels Interferenzen von sichtbarem Licht sehr genau ermitteln läßt. Das Ergebnis ist folgendes: Bei einer Schichtdicke des Glimmerabsorbers von $1,1\ \mu$ ergibt sich ein Geschwindigkeitsverlust von $0,8\%$; bei einer Schichtdicke von $3,2\ \mu$ beträgt der Geschwindigkeitsverlust $3,5\%$. Bei einer Schichtdicke von $3,2\ \mu$ ist die oben erwähnte Verbreiterung des Geschwindigkeitsbereichs schon ziemlich beträchtlich (vgl. Abb. 3); auch die langsamere Intensitätsabnahme nach kleineren Geschwindigkeiten hin, die ich früher bei dickeren Schichten beobachtet hatte, ist hier schon deutlich zu erkennen. Über die Methode der Auswertung und ihre genaueren Ergebnisse wird Herr Boochs demnächst selbst berichten.

Köln, Physikalisches Institut der Universität, den 21.10.1937.

(Eingegangen 24. Oktober 1937)

**Berichtigung zu der Arbeit:
Elektronenerregung und Trägerreflexion
beim Auftreffen von K^+ -Trägern auf Metalle¹⁾**

Von Werner Veith

Der die genannte Arbeit einleitende Satz „Nachdem durch Lenard²⁾ die sekundären Kathodenstrahlen entdeckt...“ ist, wie auch die auf die lichtelektrische Untersuchung Lenards hinweisende Anmerkung 2) erkennen läßt, unscharf formuliert und muß lauten: „Nachdem durch Lenard die *lichtelektrischen* Kathodenstrahlen entdeckt...“

1) W. Veith, Ann. d. Phys. [5] **29**. S. 189. 1937.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. S. S. 149. 1902.

Heidelberg, Philipp-Lenard-Institut.

(Eingegangen 29. September 1937)

Untersuchungen über Elektronenspiegel¹⁾

Von G. Hottenroth

(Aus dem Forschungs-Institut der AEG.)

(Mit 18 Abbildungen)

Inhaltsübersicht: Einleitung. — 1. Versuchsanordnung. — 2. Auswertung der Messungen. — 3. Die Elektronenlinse als Spiegel. — 4. Die optischen Eigenschaften des Potentialsattels und die Elektronensteuerung. — 5. Der „eigentliche“ Elektronenspiegel. — 6. Ein elektronenoptisches Verfahren zur Untersuchung von Oberflächen. — 7. Eigenschaften des Dreielektroden spiegels. — Zusammenfassung.

Einleitung

Als Elektronenspiegel bezeichnen wir, entsprechend der Definition in der Optik, Systeme, die die Richtung eines Abbildungsstrahlenganges umkehren. Zu ihrer Herstellung benutzt man, wie bei den elektrischen Elektronenlinsen, rotationssymmetrische Potentialfelder, die sich zwischen aufgeladenen Blenden und Zylindern ausbilden. Die Elektronen werden in ihnen allmählich abgebremst und schließlich zur Umkehr gezwungen. Die Spiegelung erfolgt also in derartigen Systemen nach einem Vorgang, der der Strahlkrümmung in inhomogenen Medien und der Totalreflexion in der Optik entspricht, so daß man statt Spiegel exakter „rückwendige Abbildungssysteme“ sagen sollte. Insbesondere ist zu beachten, daß die Umkehr der Elektronen nicht etwa an materiellen Flächen, sondern an Potentialflächen erfolgt.

Die Theorie solcher Spiegel behandelten Henneberg und Recknagel²⁾. Sie legten dabei das Feld einer elektrischen Einzellinse zugrunde, das theoretisch und praktisch schon weitgehend in seinen *Linseneigenschaften* bekannt war³⁾. Wenn bei diesem System aus drei Elektroden die Mittelelektrode stark negativ aufgeladen wird, reicht die Energie der Elektronen nicht aus, um die Potentialschwelle zu überschreiten, und sie kehren um. Aus der Elektronenlinse ist damit ein Elektronenspiegel geworden, und zwar je nach den Bedingungen ein *Sammel- oder Zerstreuungsspiegel*. Recknagel⁴⁾

1) Dissertation der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Berlin.

2) W. Henneberg u. A. Recknagel, *Ztschr. f. techn. Phys.* **16**. S. 621. 1935.

3) H. Johannson u. O. Scherzer, *Ztschr. f. Phys.* **80**. S. 183. 1933.

4) A. Recknagel, *Ztschr. f. techn. Phys.* **17**. S. 643. 1936; *Ztschr. f. Phys.* **104**. S. 381. 1937.

zeigte, daß dabei die Abbildungseigenschaften des Systems erhalten bleiben.

Auf Grund dieser theoretischen Ergebnisse wurden die im folgenden beschriebenen Versuche begonnen. Zunächst mußte festgestellt werden, ob die Spiegelung der Elektronenstrahlen regelmäßig vor sich geht, oder ob nicht die von der Theorie unberücksichtigten störenden Einflüsse sich bei den stark verlangsamten Elektronen in der Nähe des Umkehrpunktes empfindlich bemerkbar machen. Ein solches Störfeld bilden die Elektronen infolge der mit ihrer Verlangsamung wachsenden Raumladung selbst, die an der Umkehrstelle erhebliche Beträge anzunehmen vermag.

Über die ersten elektronenoptisch hergestellten Spiegelbilder wurde bereits in einer vorläufigen Mitteilung berichtet¹⁾. Die Aufgabe vorliegender Arbeit war es, die Eigenschaften von Spiegelsystemen quantitativ festzulegen, mit der Theorie zu vergleichen und die dabei gesammelten Erfahrungen zum Bau verbesserter Systeme zu verwerten. Bei der Behandlung dieser Aufgabe wurde ein Verfahren zur Oberflächenuntersuchung gefunden, über das hier ebenfalls berichtet werden wird.

1. Versuchsanordnung

Zur Untersuchung des Elektronenspiegels wird man in einem durch Gegenstand, Linse und Schirm bestimmten Strahlengang den Spiegel einschieben und nun das gespiegelte Bild auf einem anderen Schirm beobachten und ausmessen. Um dabei die Fehler zu vermeiden, die durch schiefen Einfall entstehen, wird man bestrebt sein, das Spiegelsystem so einzuschieben, daß seine optische Achse mit der Achse des ursprünglichen Strahlenganges übereinstimmt. Diese Aufgabe ist durch Anwendung eines magnetischen Querfeldes lösbar, ohne daß die einfallende Strahlung durch den Bildschirm gestört zu werden braucht. Auf Grund dieser Erwägungen und nach Durchführung einiger Vorversuche wurde die Anordnung Abb. 1 gewählt, die, wenig verändert, zu sämtlichen Versuchen verwandt wurde. Sie bestand aus einer Glaskugel mit 4 in einer Ebene liegenden Ansätzen. Der erste Ansatz trug an einem Schliff die Elektronenquelle *K*, eine mit Barium-Oxyd pastierte Plankathode (Wehneltkathode). Die Glühelatronen konnten durch ein davor angebrachtes Zweiblendensystem *B* (Immersionsobjektiv), das als Kondensor diente, beschleunigt und gerichtet werden. Vor dem Kondensor befand sich der abzubildende Gegenstand *N*, ein feinmaschiges Netz von 0,15 mm Maschen-

1) G. Hottenroth, Ztschr. f. Phys. 103. S. 460. 1936.

weite. Auf dem Netz war durch einige Nadelstiche eine Unsymmetrie erzeugt, um entscheiden zu können, ob das Bild aufrecht oder umgekehrt war.

In dem zweiten Ansatz befand sich die Spiegelanordnung *E*. In Abb. 1 ist an dieser Stelle das bereits erwähnte System eingezeichnet,

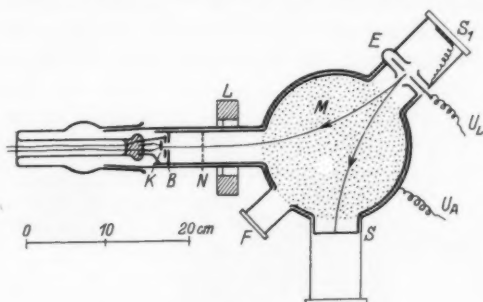


Abb. 1. Schema der Versuchsanordnung.

K Kathode, *B* Immersionsobjektiv, *N* Netz als Abbildungsgegenstand, *L* magnetische Linse, *M* magnetisches Querfeld, *E* Spiegelanordnung, *S* Leuchtschirme, *F* Beobachtungsfenster

das je nach der angelegten Spannung sowohl Linse als auch Spiegel sein kann. Zu den ersten Versuchen mit dieser sogenannten Einzellinse war dieser Ansatz durch eine aufge kittete Glasscheibe S_1 , die auf der Innenseite mit Leuchtsubstanz bestäubt war, abgeschlossen. Dadurch war es möglich, das System gleichzeitig in seinen Linseneigenschaften zu beobachten, was besonders in der Nähe des Übergangsbereiches von der Linse zum Spiegel von Bedeutung ist. Später wurde an Stelle des Planfensters ein Schliß an das Rohr gesetzt, an dem sich eine Schraubvorrichtung *T* befand (Abb. 2, rechts oben). Durch diese Vorrichtung, die den Ansatz mit der Durchführung beweglich macht, wurde die Zentrierung der Systeme wesentlich erleichtert. Der dem Spiegel gegenüberliegende Stutzen *F* erlaubte die Beobachtung der Vorderseite des Spiegels.

Das ganze Versuchrohr zeigt Abb. 2. Man erkennt außer den bereits genannten Teilen die eine¹⁾ der beiden Ablenkspulen M_1 , deren Magnetfeld den Strahlengang in der in Abb. 1 gezeichneten Weise vom Objekt *N* auf die Spiegelanordnung *E* (vgl. Abb. 1) und nach Reflexion von dort auf den Schirm *S* lenkt, und eine magnetische

1) Die zweite Ablenkspule M_2 , die symmetrisch zu dieser über dem Rohr sitzt, wurde der Übersichtlichkeit halber zu der Aufnahme entfernt.

Linse *L*. Diese Linse ermöglicht es, auch bei Verwendung eines Zerstreuungsspiegels abzubilden. Außerdem erlaubt sie, die Bildebene in beliebiger Entfernung einzustellen, da die gegenseitige Lage von Objekt, Abbildungselementen und Auffangschirm im Vakuum nicht verändert wurde¹⁾.

Der leichteren Handhabung halber war für die ersten Versuche eine magnetische Linse gewählt worden. Es zeigte sich jedoch, daß durch die Überlagerung des Querfeldes und des Linsenfeldes die

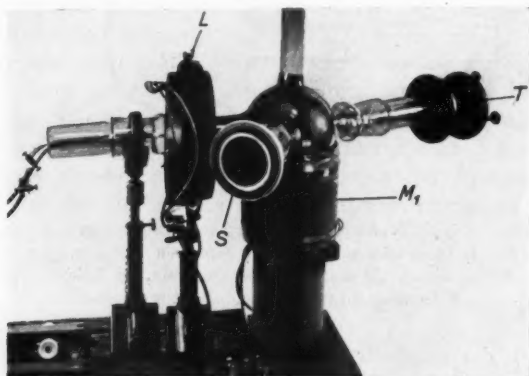


Abb. 2. Versuchsanordnung.

Apparatur zur Untersuchung von Elektronenspiegeln.

L magnetische Linse, *M* magnetische Ablenspule, *T* Schraubvorrichtung,
S Beobachtungsschirm

Elektronenbahnen störend beeinflußt wurden. Die Strahlen wurden aus der Zeichenebene (vgl. Abb. 1) herausgelenkt, was durch Schrägstellung der Spule kompensiert werden mußte. Dadurch wuchsen aber deren Linsenfehler. Aus diesem Grunde wurde später an Stelle der magnetischen Linse eine beschleunigende Immersionslinse²⁾ benutzt.

Die Innenseite des Glasgefäßes war mit einer feinen Silberschicht (durch Aufdampfen) ausgekleidet, die ebenso wie das Objekt *N*, die vordere Elektrode der Spiegelanordnung und die Auffangschirme auf Anodenpotential lag. So entstand zwischen den Abbildungselementen ein elektrostatisch weitgehend feldfreier Raum, wie er erforderlich

1) Später erwies sie sich auch aus anderen Gründen als notwendig, wie im folgenden Abschnitt näher gezeigt wird.

2) R. Behne, Ztschr. f. Phys. 101. S. 521. 1936.

ist, wenn man das Verhalten eines Systems — hier des Spiegels — für sich untersuchen will.

Zur Erhaltung eines guten Vakuums war die ganze Apparatur durch einen (in Abb. 1 nicht gezeichneten) Stutzen ständig an eine 4stufige, mit Quecksilber betriebene Stahldiffusionspumpe angeschlossen. Bei entsprechend kurzen Pumpleitungen und guter Kühlung mit flüssiger Luft wurde es trotz vieler Kittstellen und Schliffe erreicht, daß der restliche Gasdruck von der Größenordnung 10^{-4} mm Hg war, was zum Teil mit dem MacLeod, zum Teil mittels Ionisationsmanometer überwacht wurde.

2. Auswertung der Messungen

Der Gedanke, der zum Bau der beschriebenen Apparatur geführt hat, war der Optik entlehnt. Dort würde man mit einer Linse L

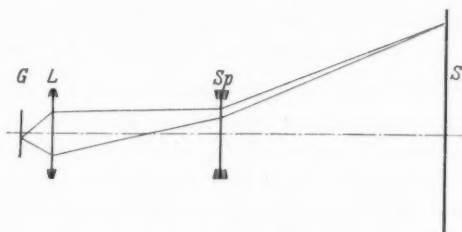


Abb. 3. Optische Abbildung mit zwei Linsen

(Abb. 3) von dem Gegenstand G ein reelles Bild etwa auf den Schirm S entwerfen. Dann würde man in den Strahlengang das zu untersuchende Brechungselement $Sp^1)$ bringen und würde finden, daß dadurch das Bild unscharf wird. Man würde nun die Brechkraft von L derart ändern, daß das Bild wieder auf S scharf wird und könnte aus der Lage von G , L , Sp und S und der Brennweite der Linse L dann die Brennweite von Sp berechnen.

Bei der Ausführung des analogen Experiments in der Elektronenoptik zeigte sich nun, daß sich dieses in der Optik mögliche Verfahren nicht verwenden läßt. Überraschenderweise konnte nämlich das von beiden Brechungselementen auf S entworfene Bild nur mit der ersten Linse L scharf gestellt werden, wogegen sich durch beliebige Änderung der Brechkraft von Sp seine Schärfe kaum merklich

1) Daß wir in der Abbildung an Stelle des Spiegels eine Linse Sp gezeichnet haben, ändert an den Überlegungen nichts und ist nur der Übersichtlichkeit halber geschehen.

ändern ließ. Der Grund ist der, daß Elektronenstrahlengänge erfahrungsgemäß, und wie später noch näher begründet wird, im allgemeinen auf äußerst kleine Aperturen führen. Dadurch bekommt das Bild eine so große Tiefenschärfe, daß man praktisch seine Lage gar nicht angeben kann. Es ist zwischen Sp und S überall und immer dann scharf, wenn es mit der Linse L auf Sp scharf abgebildet wurde. Bei so kleinen Aperturen kann man daher zur Auswertung der Messungen so verfahren, als ob man es nicht mit einem reellen Bild des Gegenstandes, sondern mit einem Schattenriß zu tun hätte.

Daß die Apertur tatsächlich, wie behauptet, sehr klein wird, sieht man durch die folgende Überlegung. Durch die Art der Beschleunigung, die gewöhnlich nahezu der Wirkung eines homogenen elektrischen Feldes entspricht, werden die diffus aus der Kathode austretenden Elektronen weitgehend parallel zur Achse gerichtet. Man kann daher überschlagsmäßig sagen, daß der Winkel α , den die Bahn eines streifend aus der Kathode austretenden Elektrons nach Durchlaufen des beschleunigenden Feldes der Spannung U mit der Achse bildet, den Wert $\alpha \sim \text{tg } \alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon}{U}}$ hat, wo ε die gegen die Beschleunigungsspannung sicher stets kleine Austrittsenergie ist. Man sieht also, daß der Aperturwinkel α eines solchen Bündels an sich schon klein ist. Nun sind wir aber in unserer Apparatur, um die Trennung von einfallendem und reflektiertem Strahl durch das magnetische Querfeld bewerkstelligen zu können, an gewisse Strahlenlängen gebunden, die zu einer weiteren Verkleinerung des Öffnungswinkels führen. Die Apertur wird hierdurch noch um den Faktor $1/V$ verkleinert, wobei V die Lateralvergrößerung ist.

Es wurde daher der Versuch unternommen, durch einen Kunstgriff nach einem Gedanken von Wolf¹⁾ die Apertur künstlich zu vergrößern. Der ausgerichtete Elektronenstrahl wurde dabei mit Hilfe der Ablenkvorrichtung einer Braunschen Röhre auf einem Kegelmantel herumgeführt, damit er in raschem zeitlichen Nacheinander unter großem Aperturwinkel den Gegenstand trifft.

Gegenüber solchen Öffnungswinkeln haben aber die gewöhnlichen „kurzen“ Linsen der Elektronenoptik zu starke sphärische Fehler. Man erhält nur dann ein scharfes Bild, wenn man mit äußerst kleiner Gegenstandsweite arbeitet. Damit steigt aber die Vergrößerung, was, wie erwähnt, wieder zur Verkleinerung der Apertur führt. Dazu kommt, daß bei kleiner Brennweite der Gegenstand sich schon im sammelnden Felde der Linse befindet, wir die Linse also nicht mehr als „kurz“ bezeichnen können. In diesem Falle müssen wir aber

1) F. Wolf, Ann. d. Phys. 83. S. 849. 1927.

die Strahlkrümmung innerhalb der Linse in ihrer ganzen Ausdehnung berücksichtigen und können uns nicht auf die sonst übliche Schematisierung beschränken, wonach sich der Einfluß der Linse auf die Strahlknickung in der Hauptebene lokalisiert. Beschleunigungslinsen bewirken dadurch eine weitere Verkleinerung der Apertur; wahrscheinlich ist das der innere Grund, weswegen sie erfahrungsgemäß besser abbilden und vorzugsweise benutzt werden¹⁾.

Wir sehen also, daß es unmöglich ist, nach dem oben beschriebenen optischen Verfahren auf eine Bildebene einzustellen und nach diesem Kompensationsverfahren auf die Brennweite zu schließen. Deshalb mußte eine andere Methode zur Bestimmung der Brechkraft gewählt

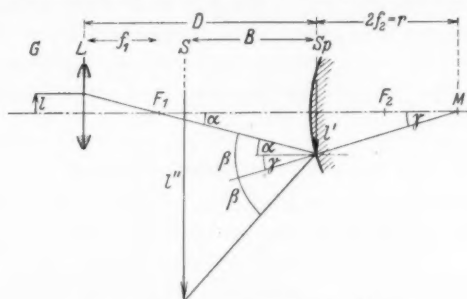


Abb. 4. Elektronenoptische Strahlung.

l Größe des Gegenstandes G , l' Größe des durch L auf Sp entworfenen Bildes,
 l'' Größe des Spiegelbildes

werden. Diese bestand im folgenden: Man beleuchtet den Gegenstand G (Abb. 4) mittels des Kondensors mit Strahlen sehr kleiner Öffnung, die nahezu achsenparallel sind, und die durch die Linse L praktisch in deren Brennpunkt F_1 vereinigt werden. Dieser Linse geben wir eine solche Brechkraft, daß sie ein Bild von G auf der Ebene des Spiegels Sp entwirft. Die Strahlen werden dort nach dem Reflexionsgesetz reflektiert und fallen auf den Schirm S , wo sie, wie gesagt, ein Schattenbild von G entwerfen.

Nach Abb. 4 ist dann $\alpha = \frac{l}{f_1} = \frac{l'}{D - f_1} = \frac{l + l'}{D}$. Ferner ist $\frac{l'' - l'}{B} = 2\beta - \alpha$ und schließlich $\frac{l'}{2f_2} = \gamma$, wobei die Winkel in der Beziehung stehen $\alpha + \gamma = \beta$. Daraus folgt unmittelbar

$$\frac{1}{f_2} = \frac{l'' - l'}{Bl'} - \frac{l' + l'}{Dl'}$$

¹⁾ H. Johansson u. O. Scherzer, Ztschr. f. Phys. 80. S. 183. 1933 und R. Behne, ebenda 101. S. 521. 1936.

als reziproke Brennweite des Spiegels¹⁾. Dabei sind alle eingehenden Größen Strecken. Eine gewisse Unsicherheit besteht bei der Messung von D und B , da diese Strecken durch das magnetische Querfeld gekrümmt sind und wir nicht ohne weiteres wissen, welche Bahn die Elektronen dort beschreiben. Es wurde daher angenommen, daß das Ablenkkfeld sich auf das Innere eines Zylinders beschränkt, dessen Durchmesser gleich dem Durchmesser der Ablenkspulen ist, und daß es dort homogen ist. Wir können dann D und B außerhalb der Spulen als geradlinig und innerhalb als kreisförmig annehmen, wodurch wir uns sicher nicht weit von der Wirklichkeit entfernen.

Außerdem bewirkt das Querfeld noch eine Fokussierung in Richtung seiner Ablenkung. Man vermeidet diese Fehlerquelle, wenn man l' und l'' an Strecken mißt, deren Richtung parallel zu den magnetischen Kraftlinien ist, also in unserer Apparatur senkrecht zur Zeichenebene der Abb. 1.

3. Die Elektronenlinse als Spiegel

Die elektronenoptische Linse, an der die ersten Brennweitenberechnungen durchgeführt wurden und die auch in ihrer Eigen-

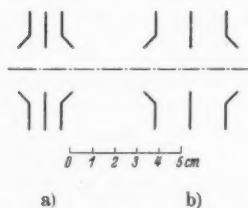


Abb. 5. Untersuchte elektrische Einzellinsen

schaft als Elektronenspiegel bisher allein theoretisch untersucht worden ist, ist die in Abb. 5a dargestellte Einzellinse. Mit diesem System sind auch die ersten Spiegelversuche durchgeführt worden. Außerdem wurde ein gleichartiges System mit doppelt so großer axialer Ausdehnung (Abb. 5b) untersucht.

Zunächst legen wir von unseren beiden Linsen das Sperrpotential fest, d. h. die Spannung, die wir bei einer gewissen Elektronengeschwindigkeit an die Mittelelektrode legen müssen, um gerade die Elektronen am Durchgang durch die Linse zu verhindern. Wir erhalten bei unseren beiden Systemen a und b, wenn wir Elektronen von $U_A = 750$ eV verwenden, die Spannungen 1570 bzw. 1130 Volt als Potentialdifferenzen U_L an den Linsen. Daraus ergibt sich das Spannungsverhältnis $U_L/U_A = -2,04$ bzw. $-1,53$. Bei diesen Spannungsverhältnissen ist also das Potential des Sattel-

1) Die Richtigkeit der Voraussetzung, daß das Objekt von praktisch achsenparallelen Strahlen beleuchtet wird, wurde im Experiment dadurch bestätigt, daß der ausgeleuchtete Bereich von G und L ebenso groß war wie die Öffnung der Kondensorblenden.

punktes gerade dem Kathodenpotential gleich. Um von diesen mehr zufälligen, durch kleine Unterschiede in der mechanischen Ausführung bedingten, Werten unabhängig zu werden und die verschiedenen Systeme besser vergleichen zu können, ist bei den Betrachtungen dieses Abschnittes stets das gegen Anode gemessene Sattelpotential, das wir fortan mit \bar{U}_L bezeichnen, im Verhältnis zum Anodenpotential angegeben. Für beide Systeme gilt jetzt also definitionsgemäß, daß Sperren bei $\frac{\bar{U}_L}{U_A} = -1$ erfolgt.

In Abb. 6 ist die theoretische Brennweitenkurve der in Abb. 5a dargestellten Einzellinse in dem Bereich, in dem sie als Linse wirkt,

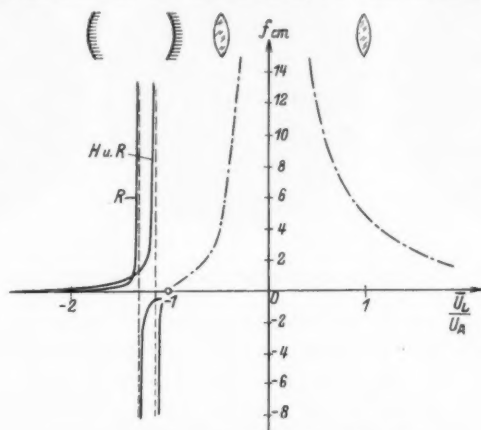


Abb. 6. Brennweitenkurve der Einzellinse als Linse nach Johannson und Scherzer (gemessen und theor. — · — · —) und als Spiegel nach Henneberg und Recknagel und Recknagel (beides theor. — — —)

d. h. für $\left(\frac{\bar{U}_L}{U_A}\right) > -1$ strichpunktiert aufgetragen¹⁾. Außerdem sind ausgezogen die von Henneberg und Recknagel²⁾ und Recknagel³⁾ nach verschiedenen Methoden berechneten Brennweitenwerte für den Bereich eingetragen, in dem die Linse als Spiegel wirkt, d. h. für $\left(\frac{\bar{U}_L}{U_A}\right) < -1$. Das System ist danach, nachdem es zum Spiegel geworden ist, zunächst Sammelspiegel, um dann über den

1) H. Johannson u. O. Scherzer, Ztschr. f. Phys. **80**. S. 183. 1933.

2) W. Henneberg u. A. Recknagel, Ztschr. f. techn. Phys. **16**. S. 621. 1935.

3) A. Recknagel, Ztschr. f. Phys. **104**. S. 381. 1937.

ebenen Spiegel¹⁾ (Asymptote, d. h. $f = \infty$) in den Zerstreuungsspiegel überzugehen. Wo dieser Übergang erfolgt, kommt aus den Rechnungen etwas verschiedenes heraus, ohne daß mit Sicherheit gesagt zu werden vermag, welche Rechnung die bessere Näherung ergibt.

Prüfen wir nun diese Aussagen der Theorie am Experiment. Bei stark negativem Spannungsverhältnis \bar{U}_L/U_A erhalten wir ein einwandfreies vergrößertes Bild. Mit sinkender Spannung an der Mittelelektrode beginnt jedoch die Abbildung sich zu verzerren,

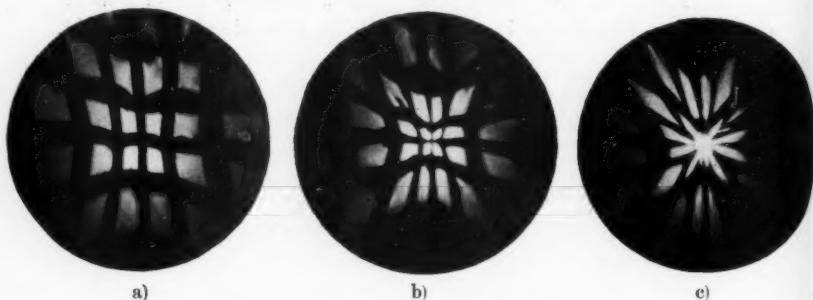


Abb. 7. Spiegelbilder einer Einzellinse

indem sie sich in der Mitte mehr verkleinert als am Rande (Abb. 7). Rechnen wir aus den Abständen usw. aus, welche Vergrößerung und Orientierung das Bild haben müßte, wenn der Spiegel ein Planspiegel wäre, so sehen wir, daß in Abb. 7a das System als Zerstreuungsspiegel wirkt. In Abb. 7b wurde, so gut es bei dieser Verzerrung noch geht, auf die errechnete Vergrößerung des Planspiegels eingestellt. Das hierbei festgestellte Spannungsverhältnis gibt uns also in der Brennweitenkurve die Lage der Asymptote. Kommt man noch näher an das Übergangsgebiet zwischen Linse und Spiegel heran, so wird das Spiegelbild der Form des ursprünglichen Netzes immer unähnlicher, und eine Aussage über die Vergrößerung ist nicht mehr möglich.

Wir können also nur im Bereich des Zerstreuungsspiegels den Verlauf der Brennweitenkurve sicher angeben, denn nur in diesem Gebiet finden wir einen ausmeßbaren Teil des Gegenstandes ähnlich vergrößert im Spiegelbild wieder. Dieser Kurvenzweig ist in Abb. 8 mit der Bezeichnung a_1 wiedergegeben.

1) Dieser Zustand ist natürlich, im Gegensatz zur Optik, nicht durch seine besondere Form ausgezeichnet, sondern nur dadurch charakterisiert, daß einfallender und reflektierter Strahl den gleichen Winkel mit der Achse bilden.

Aus der Beobachtung der Bildveränderung, die eintritt, wenn wir uns mit der Potentialebene, an der die Elektronen umkehren, dem Sattelpunkt nähern, kann man jedoch schließen, daß die Brennweitenkurve etwa den Verlauf hat, der als Kurvenzweig a_2 in Abb. 8 bezeichnet ist. Aus der unmittelbaren Betrachtung des Leuchtschirmbildes kann dies, wenn man seine Entstehung und seine Veränderung unter den verschiedensten Einflüssen beobachtet, eher geschlossen werden, als aus den wiedergegebenen Photographien (Abb. 9), die einen solchen Schluß kaum rechtfertigen würden.

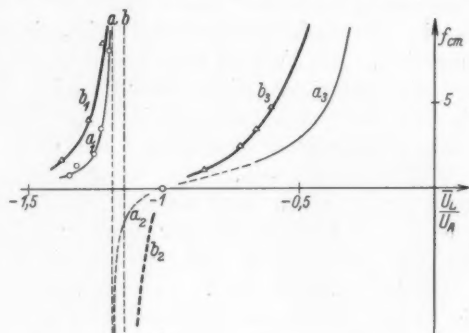


Abb. 8. Gemessene Brennweiten
vom System Abb. 5a) ———, b) ———

Der anschließende Kurvenzweig a_3 ist wieder die von Johansson und Scherzer angegebene Linsenbrennweite, die wir noch einmal zur besseren Orientierung eingezeichnet haben¹⁾. Es besteht qualitative Übereinstimmung mit der Theorie insofern, als die gemessenen Punkte nahezu in der Mitte zwischen den beiden in Abb. 6 wiedergegebenen Näherungen liegen.

Die Meßergebnisse am System 5b als Spiegel sind in Abb. 8 als Kurven b_1 und b_2 wiedergegeben. Hier wurde jedoch auch der anschließende Linsenbereich beobachtet und das Ergebnis als Kurve b_3 eingetragen. Die Spiegelbilder der beiden Systeme bei den gleichen Vergrößerungen waren so ähnlich, daß auf eine gesonderte Wiedergabe verzichtet sei. Insbesondere ist auch das System b als Sammelspiegel unbrauchbar.

Aus den Kurven a und b in der Abb. 8 ersieht man, daß das breitere System (vgl. Abb. 5b) größere Brennweiten (kleinere Brech-

1) Zur Erhöhung der Deutlichkeit wurde gegenüber der Abb. 6 ein etwas anderer Maßstab gewählt (Abszisse gestreckt).

kräfte) hat als das System 5a. Diese Tatsache erklärt sich durch die größere axiale Ausdehnung des Systems 5b, durch die die Potentiale bei gleichem Potential des Sattelpunktes langsamer anwachsen, so daß das Feld im ganzen Verlauf homogener wird, und bekanntlich hat ein streng homogenes Feld ja überhaupt keine Brechkraft.

4. Die optischen Eigenschaften des Potentialsattels und die Elektronensteuerung

Auf der optischen Achse der Einzellinse, deren Mittelelektrode negativ gegen die Außenelektroden aufgeladen ist, liegt ein Sattelpunkt des Potentials. Das Feld an dieser Stelle hat das niedrigste Potential, und die Elektronen haben daher dort ihre kleinste Geschwindigkeit. Die Form des Potentialfeldes um den Sattelpunkt wird daher von maßgebendem Einfluß auf die optischen Eigenschaften des ganzen Systems sein.

Nun wissen wir aber aus der Potentialtheorie, daß das Feld in der Nähe eines Sattelpunktes auf der Achse rotationssymmetrischer Felder stets gleiche Form hat und weitgehend unabhängig von sonstigem Potentialverlauf ist¹⁾. Diese Feststellung gestattet uns also, die Beobachtungen an der Einzellinse auf alle Linsensysteme zu verallgemeinern, bei denen ein Sattelpunkt auftritt und die durch Anlegung geeigneter Spannungen zum Spiegel werden können. Wir wollen uns daher mit den Eigenschaften des Potentialsattels etwas näher auseinandersetzen. Diese Untersuchung wurde am System Abb. 5b ausgeführt.

Wir beobachten zu diesem Zweck in der Anordnung nach Abb. 1 gleichzeitig auf dem Schirm S_1 , die durch das Einzellinsensystem E hindurchtretenden, und auf S die an dem Felde reflektierten Elektronen. Dann legen wir an unser System Spannungen

zwischen $\frac{\bar{U}_L}{U_A} = -0,5$ und $-1,2$, durchlaufen also nacheinander die

Kurvenzweige b_3 und b_2 der Abb. 8. Die Beobachtungen sind in Abb. 9 zusammengestellt. Zunächst, d. h. bei den niedrigen negativen Spannungen, haben wir eine Sammellinse vor uns, deren Brechkraft mit sinkendem \bar{U}_L/U_A zunimmt, und die gesamte auffallende Strahlung geht durch die Linse hindurch (Abb. 9 f_1, g_1).

Schon bei $\frac{\bar{U}_L}{U_A} = -0,70$ beginnt aber auch der Schirm S mit beobachtbarer Intensität aufzuleuchten (Abb. 9 d_1, e_1).

1) E. Brüche u. O. Scherzer, Geometrische Elektronenoptik, S. 66.

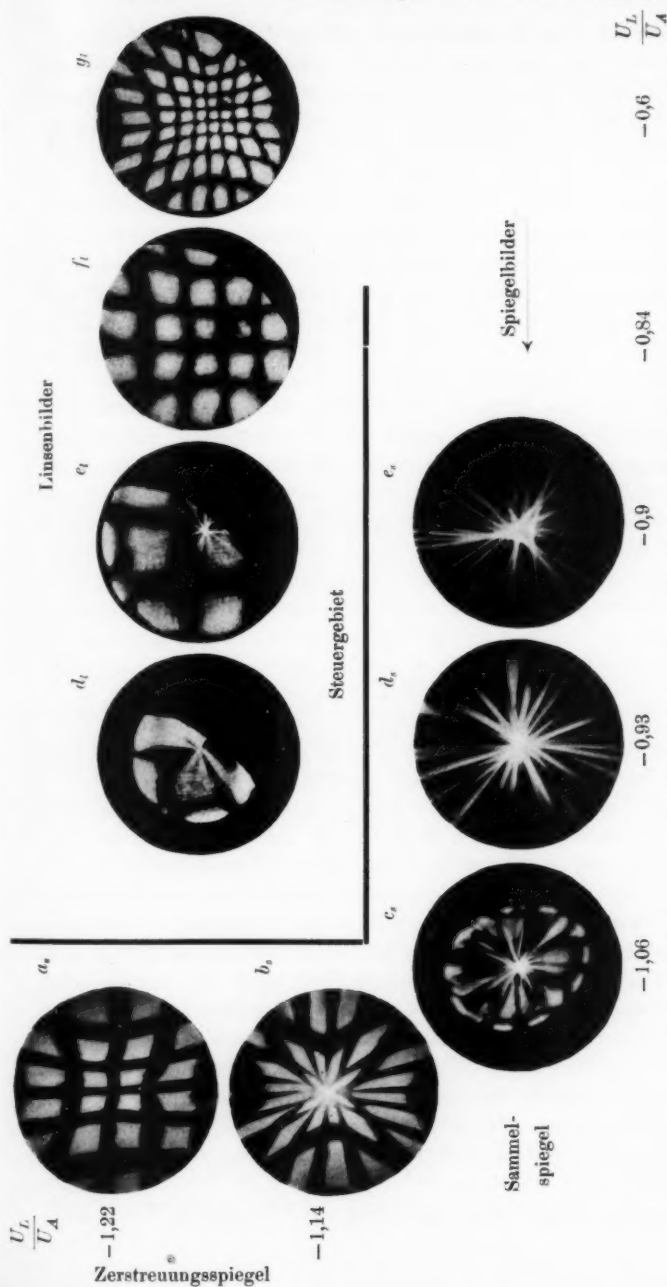


Abb. 9. Umstellung der Einzellinse zum Spiegel.

Der rechte Rand der Linsensbilder d_i — g_i ist durch eine mechanische Blende begrenzt, was sich zufällig aus dem apparativen Aufbau ergab. Die Bilder d_i und e_i sind nach subjektiven Beobachtungen vervollständigt. Die beiden Bilder a_s und b_s der unteren Reihe sind aus Platzmangel nach oben gerückt

Man beobachtet radiale Striche, deren Helligkeit bei weiterem Fortschreiten der Spannung zunimmt, ohne daß sich ihre Form wesentlich ändert. Die Gegenstandsmitte wird indessen immer noch geometrisch ähnlich auf S_1 abgebildet, wobei die Vergrößerung zwar zunimmt, der abgebildete Bereich dagegen zusammenschrumpft (Abb. 9 d_i, e_i). Bei $\frac{U_L}{U_A} = -1$ ist definitionsgemäß das Linsenbild verschwunden. Unter der vorausgesetzten Beschränkung der Gaussschen Dioptrik auf achsennahe Strahlen können wir erst jetzt das System als Spiegel ansprechen. Aber das Spiegelbild ist in diesem Bereich, wie erwähnt und wie es Abb. 9 b_i, c_i zeigt, nicht als Abbildung des Gegenstandes zu erkennen. Man sieht aus der Bilderreihe, daß es sich um eine besonders ausgeprägte sphärische Verzerrung handelt, indem die Strahlen in den verschiedenen Achsenentfernungen völlig verschiedener Brechkraft unterliegen. Diese Tatsache wurde inzwischen auch von Recknagel¹⁾ rechnerisch nachgewiesen.

Um die Vergrößerung einer Abbildung festzustellen, brauchen wir auf dem Bilde wenigstens zwei Punkte, deren Abstand zu messen und mit dem Gegenstand zu vergleichen ist —, um die Ähnlichkeit nachzuweisen, wenigstens noch einen dritten. Hätten wir ein wesentlich feineres Objekt, auf dem solche Punkte etwa in $\frac{1}{100}$ mm Entfernung von der Achse ausgezeichnet sind, so würde wahrscheinlich schon bei etwa $\frac{U_L}{U_A} = -1,1$ dieser Bereich ähnlich abgebildet werden. Bei unserem viel gröberen Objekt können wir das erst im Bereich des Zerstreuungsspiegels feststellen.

Wurde das Vorhandensein eines Sattelpunktes als ungünstig für eine optische Abbildung erkannt, so soll doch in diesem Zusammenhang auf ein technisch wichtiges Problem kurz hingewiesen werden, für das die Existenz des Sattelpunktes wesentlich ist, nämlich die Intensitätssteuerung von Elektronenstrahlen. Die achsen-nahen Gebiete des Systems lassen bei geeigneter angelegter Spannung die Elektronen noch hindurch — dieser Teil wirkt also als Linse —, die Randpartien dagegen reflektieren die Elektronen bereits, wirken also als Spiegel. Die Grenze dieser beiden Gebiete hängt dabei von dem Quotienten \bar{U}_L/U_A ab, so daß mit Veränderung dieser Größe die Intensität des durchgelassenen Elektronenstromes sich ändert. Wie schnell dieser Vorgang sich vollzieht, insbesondere wie schnell die durchkommende Intensität vom Anfangswert auf

1) A. Recknagel, Ztschr. f. techn. Phys. 17. S. 643. 1937.

Null sinkt, wird durch die Steuercharakteristik ausgedrückt. Offensichtlich hängt die Steilheit dieser Kurve davon ab, wie groß die Potentialdifferenz zwischen der Mittelblende und dem Sattelpunkt ist. Diese hängt wiederum von der Inhomogenität des Feldes ab. Es ist aber leicht zu erkennen (vgl. S. 700 oben), daß das Feld homogener wird, wenn man die radiale Ausdehnung des Systems schrumpfen, die axiale Ausdehnung wachsen läßt. Wir werden also bei einem System größerer axialer Dimensionen eine steilere Steuercharakteristik erwarten müssen. Für das System Abb. 6b wurde ein Teil dieser Kurve aufgenommen, und zwar elektronenoptisch aus dem vorhandenen Bildmaterial ausgewertet (Abb. 10). Sie gilt also für praktisch achsenparallelen Einfall. Es ist die Größe des Bildes F auf dem Schirm S_1 dividiert durch das Quadrat der Vergrößerung V des Linsenbildes als Maß der durchgehenden Intensität gewählt. Es ist also:

$$f \left(\frac{\bar{U}_L}{\bar{U}_A} \right) = \frac{F}{V^2 \pi r^2},$$

wobei r der Radius der Blenden des Systems, πr^2 also ein Maß für die maximal durchtretende Intensität ist.

5. Der „eigentliche“ Elektronenspiegel

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir gesehen, wie eine Elektroneneinzellinse zum Elektronenspiegel wird, wenn das Potential der Mittelelektrode so hohe negative Werte annimmt, daß die Elektronen diesen Potentialberg nicht mehr zu überschreiten vermögen. Wir haben weiter gesehen, daß die optischen Eigenschaften des Systems um so schlechter werden, je näher dem Sattelpunkt die Elektronen umkehren. Erst wenn bei sehr hoher Aufladung der Mittelelektrode die „spiegelnde Potentialfläche“ weit aus der Mitte herausgerückt ist, erhält man brauchbare Bilder.

Es liegt nach diesen Feststellungen nahe, ein für die Spiegelung besser geeignetes System herzustellen, indem man die Ausbildung eines Sattelpunktes verhindert. Man erreicht das durch eine in den Strahlengang gestellte Metallelektrode, die auf ein gegen die

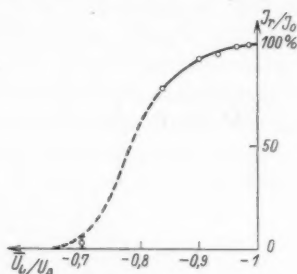


Abb. 10. Steuercharakteristik der Einzellinse nach Abb. 5b. J_r reflektierte Intensität, J_0 maximal durchtretende Intensität

Kathode negatives Potential aufgeladen wird. Jetzt kann unser Spiegel natürlich nicht mehr als Linse benutzt werden, was jedoch im allgemeinen auch nicht erforderlich ist. Da ein Teil der Einzellinse fortbleibt, erhalten wir ein einfacheres System, haben außerdem bessere Elektronenbilder und darüber hinaus geringeren Spannungsbedarf zu erwarten.

Der einfachste Elektronenspiegel dieser Art ist die negativ aufgeladene Platte (Abb. 11a). Mit ihrem Potentialfeld, das sich zwischen der runden Platte und dem umschließenden Anodenzylinder ausbildet, stellt sie das einfachste Beschleunigungsfeld dar, das bereits

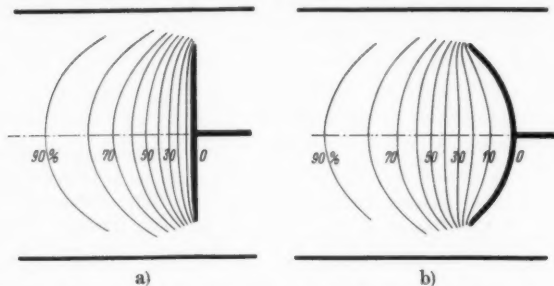


Abb. 11. Potentialfeld „eigentlicher“ Elektronenspiegel

öfter¹⁾ in seinen elektronenoptischen Eigenschaften als Linse diskutiert worden ist. Für Elektronen, die von der Platte als Kathode ausgehen, würde dieses Feld eine Zerstreuungslinse sein. Diese Zerstreuungslinse wirkt natürlich ebenso auf ankommende wie auf reflektierte Elektronen. Ein gespiegeltes Elektron unterliegt also der Zerstreuungswirkung zweimal, während ein von der Platte als Kathode ausgehendes Elektron nur einmal das Feld durchläuft. Die optische Wirkung ist demnach beim Spiegel doppelt so groß wie bei der Linse.

Unser System ist ein Zerstreuungssystem. Wir können jedoch auch sammelnde Spiegelsysteme dieser Art erhalten. Der Weg, der zu sammelnden Systemen führt, ist durch die Erfahrungen bei den Immersionsobjektiven der Elektronenoptik gewiesen. Es bestehen dort die zwei Möglichkeiten: Konkave Krümmung der Kathodenfläche oder Einbau einer besonderen Elektrode (Ring oder Kreisblende). Wir wollen uns hier zunächst mit der ersten Möglichkeit beschäftigen, während die zweite Gegenstand eines folgenden Abschnittes sein wird.

1) E. Brüche u. O. Scherzer, Geometrische Elektronenoptik, S. 100.

Bauen wir statt der ebenen Platte eine konkave Kugelschale ein, so kommt zu dem zerstreuenenden Bezirk noch ein sammelnder Bezirk zwischen Kugelschale und ebener Potentialfläche hinzu (Abb. 11 b). Ob das gesamte Feld jetzt günstigstenfalls — d. h. wenn die Elektronen bis an die Metallfläche herankommen — sammelnd oder zerstreuend wirkt, kommt darauf an, welcher Bezirk überwiegt. Dabei ist zu bedenken, daß die Elektronen im sammelnden Bezirk langsam und damit leicht beeinflusbar sind.

Mit zwei Systemen der erwähnten Art wurden Spiegelversuche durchgeführt. Abb. 12 zeigt zwei Aufnahmen, deren linke mit einem System mit ebener Platte, deren rechte mit einem System mit konkaver Kugelschale aufgenommen wurde. Die Kugelschale hatte einen

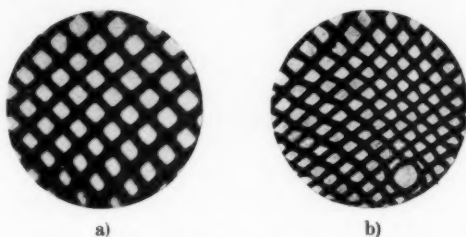


Abb. 12. Elektronenspiegelbilder mit den Systemen Abb. 11 a und b

Krümmungsradius von 3 cm bei einem Durchmesser von 4 cm. In beiden Fällen wirkte das System als Zerstreuungsspiegel, jedoch war die Zerstreuungswirkung im zweiten Falle nur noch sehr gering. Beide Bilder beweisen im Vergleich zu den mit der Einzellinse hergestellten Spiegelbildern der Abb. 7 und 9 die verbesserte Abbildungsgüte dieser Systeme.

Durch Veränderung der Elektronenenergie bzw. Änderung der Aufladung der abschließenden Platte bzw. Kugelschale kann noch die Lage der Potentialebene, an der die Elektronen umkehren, verschoben werden und damit seine Brechkraft geändert werden. Rückt diese Fläche von der abschließenden Platte ab, so wächst die Brechkraft des als Zerstreuungsspiegel wirkenden Systems. Dabei ändert sich die Bildgüte nicht merklich.

6. Ein elektronenoptisches Verfahren zur Untersuchung von Oberflächen

Im Zusammenhang mit den zuletzt beschriebenen Versuchen war eine Erscheinung beobachtet worden, die hier kurz behandelt werden soll. Wiederholen wir den Spiegelversuch etwa mit dem

System Abb. 11a und ändern die Lage der Potentialebene, an der die Elektronen umkehren, in der Weise, daß die Elektronen der abschließenden Platte immer näher kommen, so beobachten wir, daß sich dem Spiegelbild des Netzes eine sehr kontrastreiche Struktur zu überlagern beginnt (Abb. 13). Bei weiterer Erhöhung der Elektronenenergie ändert sich an dem Aussehen dieser Struktur im ganzen wenig, bis schließlich das Potential erreicht ist, bei dem die

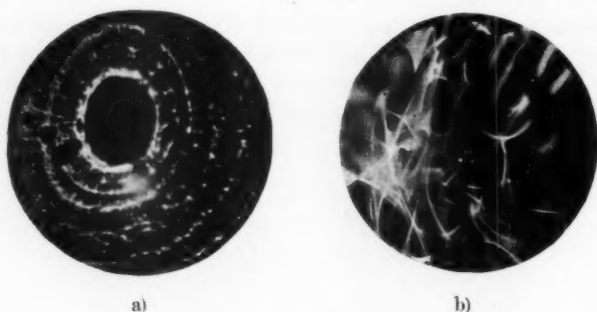


Abb. 13. Elektronenoptische Wiedergabe von Unebenheiten durch reflektierte Elektronen.

a) Platte mit feinen Drehrillen, b) Platte mit Leuchtmasse

Elektronen die Abschlußplatte treffen. Jetzt verschwindet die Struktur und es bleibt ein diffuser Schein von fast gleicher Gesamthelligkeit zurück.

Diese Beobachtungen sind offensichtlich so zu erklären, daß bei Umkehr der Elektronen in unmittelbarer Nähe der Metallfläche sich kleine Störungen im Potentialfeld, die durch Unebenheiten der Metallplatte oder kleine Spannungsunterschiede auf ihr bedingt sind, sehr stark auf den Strahlengang auswirken. Kehren die Elektronen in größerem Abstand von der Platte um, so finden sie ein weitgehend ausgeglichenes Potentialfeld vor, während sich beim Auftreffen auf die Platte natürlich eine Rückdiffusion ergibt.

Zur Prüfung der Frage, wie weit man die genannte Struktur als eine Wiedergabe der Oberfläche ansprechen darf, wurden feine Striche (Drehrillen) in die Platte eingekratzt. Es zeigte sich, daß diese um so besser im Spiegelbilde wiedergegeben wurden, je feiner sie waren (Abb. 13a). Ferner wurde dem Strahlengang eine Metallplatte entgegengestellt, auf der Leuchtsubstanz in üblicher Weise aufgebracht war. Es zeigte sich ein Bild, das keine Rückschlüsse auf die Struktur dieser Oberfläche zuläßt, sondern darauf hindeutet,

daß hier auch Potentialunterschiede in der locker aufliegenden Schicht eine die Deutung erschwerende Rolle gespielt haben.

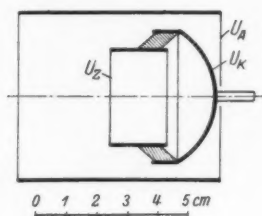
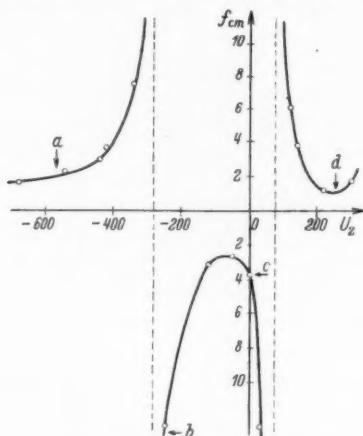
7. Eigenschaften des Dreielektrodenspiegels

Bisher hatten wir Zweielektrodensysteme behandelt, bei denen die erwünschte Sammelwirkung durch geeignete Krümmung der das System abschließenden Platte erreicht wurde. Die zweite Möglichkeit zur Erzielung der gleichen Wirkung besteht in der Einführung einer besonderen Elektrode, mit der man das Potentialfeld entsprechend beeinflußt. Diese zweite Methode wird normalerweise bei Immersionssystemen, wie sie zur Abbildung von Kathoden dienen, benutzt. Ein solches System aus drei Elektroden hat den Vorteil, daß die Brechkraft leicht durch Spannungsänderung eingestellt werden kann. Bei einem System aus zwei Elektroden ist im Gegensatz dazu das Potentialfeld ein für alle Mal festgelegt, so daß wir als Veränderliche nur noch über die Elektronengeschwindigkeit bzw. was beim Spiegel das Gleiche ist, über die Eindringtiefe in das Potentialfeld frei verfügen können.

Wir sahen bereits, daß die Verhältnisse bei der Verwendung solcher Systeme als Elektronenspiegel etwas anders liegen als bei ihrer Verwendung als Immersionslinse zur Kathodenabbildung. Während bei ihrer Verwendung als Abbildungslinse die Elektronen stets von der abschließenden Platte ausgehen, kann bei ihrer Verwendung als Spiegel die Umkehrfläche durch entsprechende Aufladung der Abschlußplatte noch verschoben werden. Der „Dreielektrodenspiegel“ ist demzufolge dem üblichen Immersionsobjektiv mit Kathode und zwei Blenden nur hinsichtlich des Aufbaues parallel zu ordnen, während er durch verschiedene Aufladung der Abschlußplatte eine höhere Mannigfaltigkeit von Abbildungsfeldern liefert. Wir erhalten somit für ein solches System nicht eine Brennweitenkurve, sondern eine Schar von Kurven, deren Parameter das Potential der Abschlußplatte ist. Es ist zu erwarten, daß wir bei der experimentellen Durchführung der verschiedenen Möglichkeiten ein Potentialfeld finden können, das fehlerfreiere Abbildungen ergibt, als sie die bisher betrachteten Systeme lieferten.

Zu den Untersuchungen wurde ein System gewählt, bei dem nach den Erfahrungen über die Bildgüte bei hohlspiegelartig gekrümmten Kathoden nicht eine ebene Platte, sondern eine Kugelschale verwendet wurde. Das System, das in Abb. 14 dargestellt ist, ist aus dem oben erwähnten System Abb. 11b durch Einbau eines Ringes hervorgegangen. Der Ring hatte 3,6 cm Durchmesser und eine Höhe von 2,4 cm.

Wir führen unsere Versuche in gleicher Weise wie bisher mit einer Anodenspannung von $U_A = 750$ Volt durch. Die Kugelschale des Spiegelsystems sei zunächst auf $U_K = -250$ Volt gegenüber der Kathode aufgeladen. Die Spannung am Zwischenzylinder U_Z wird von $+300$ bis -800 Volt kontinuierlich geändert, wobei das gespiegelte Elektronenbild beobachtet wird. Abb. 15 zeigt die aus

Abb. 14. Dreielektrodenspiegel ¹⁾Abb. 15. Brennweitenkurve
des Systems Abb. 14

den Messungen sich ergebende Brennweitenkurve des Systems. Es ist die Brennweite f in Zentimetern über dem Potential U_Z des Zwischenzylinders aufgetragen. Wir erkennen, daß die Brennweitenkurve aus drei Teilen besteht. Das System ist bei großer negativer Ringspannung U_Z zunächst ein Zerstreuungsspiegel. Bei $U_Z \sim -260$ Volt wird der Spiegel ein Sammelspiegel, der bei $U_Z \sim -50$ Volt ein Maximum der Brechkraft erreicht. Bei weiterer Steigerung über $U_Z = +60$ Volt wird der Spiegel wieder ein Zerstreuungsspiegel.

Um die optischen Eigenschaften des Systems aus der Form des Potentialfeldes zu erklären, wurden für einige Spannungsverhältnisse an einem vergrößerten Modell des vorliegenden Systems im elektrolytischen Trog die Felder ausgemessen. Diese Potentialverteilungen sind in Abb. 16 a—d zusammengestellt. Die entsprechend bezeichneten Pfeile in Abb. 15 deuten an, an welcher Stelle in dieser Kurve die

1) Das zum Bau dieses Systems verwandte Isolierstück (ein mit dem Drehstahl bearbeitbares keramisches Material) wurde mir freundlicherweise von der Firma Steatit-Magnesia zur Verfügung gestellt.

betreffende Potentialverteilung eintritt. Ebenso ist an den Abb. 16 durch Pfeile markiert, wie weit in diesem Falle die Elektronen in das Feld eindringen¹⁾.

In Abb. 16a, bei stark negativer Spannung am Zwischenzylinder, ist die Umkehrfläche der Elektronen konvex gegen die von links

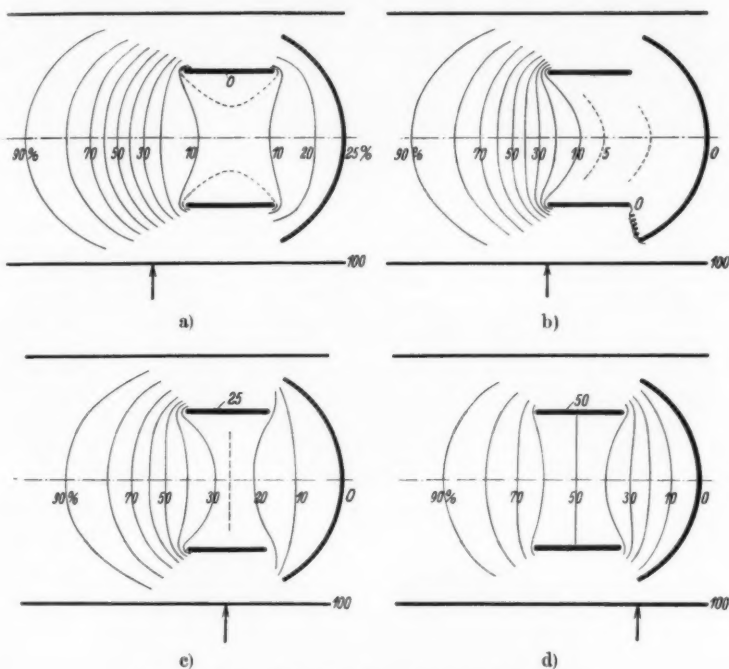


Abb. 16. Potentialfelder des Dreielektroden spiegels für verschiedene Potentiale am Zwischenzylinder

kommenden Strahlen gekrümmt; das Elektron bewegt sich also nur in einem Feld, in welchem es von der optischen Achse weggetrieben wird. Wir erwarten nach der Potentialverteilung einen Zerstreuungsspiegel, wie es die Brennweitenkurve auch bestätigt. In der folgenden Abb. 16b, wo der Zwischenzylinder das Potential der Kugelschale

1) Die Abb. 16a enthält auch einen Sattelpunkt, doch kehren bei den hier wiedergegebenen Versuchen die Elektronen in großer Entfernung vor ihm um. Versuche mit höherer Elektronenenergie bestätigten die Behauptung, daß der Sattelpunkt die elektronenoptischen Eigenschaften bei allen Systemen in ähnlicher Weise beeinflußt.

hat, ist die Nullfläche schwach konkav gekrümmt. Wie die Brennweitenkurve zeigt, genügt diese geringfügige Krümmung schon zur Erzeugung eines Sammelspiegels. Das liegt daran, daß die Krümmung der Potentialfläche nahe der Umkehrstelle infolge der dort sehr kleinen Elektronengeschwindigkeit entscheidend ins Gewicht fällt.

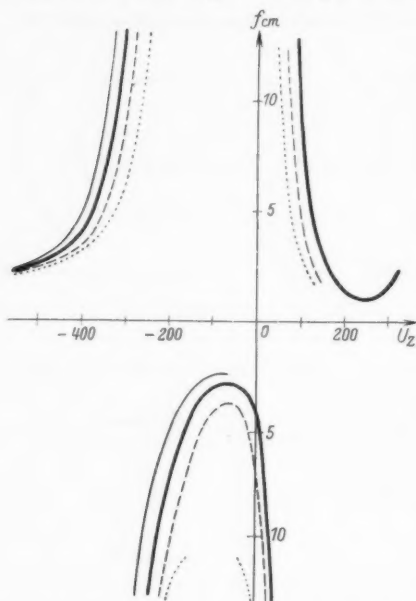


Abb. 17. Raumweite des Systems Abb. 16 für verschieden hohes Potential U_Z des Zwischenzylinders in verschieden hohem Potential U_K der Kugelschale.

$$U_A = 750 \text{ Volt} \begin{cases} U_K = 0 \text{ Volt} & \text{---} \\ U_K = -250 \text{ Volt} & \text{---} \\ U_K = -500 \text{ Volt} & \text{---} \\ U_K = -750 \text{ Volt} & \text{---} \end{cases}$$

von + 500 bis - 750 Volt geändert. Für jedes dieser Potentiale kann die gleiche Betrachtung durchgeführt werden wie oben für das Potential von - 250 Volt. Auch in diesen Versuchsreihen wird je einmal eine Potentialverteilung an den Elektroden erreicht, die den Feldern Abb. 16a—d entspricht, nur haben die Elektronen dann eine andere Eindringtiefe. Die vollständige Schar der Brennweitenkurven gibt Abb. 17. Die stark ausgezogene Kurve ist identisch

Erniedrigen wir die Spannung des Zwischenzylinders noch weiter, so kommen wir an das Maximum der Brechkraft heran (ungefähr Abb. 16c). Bei noch stärkerer Spannungsverminderung laufen schließlich die Elektronen durch das Sammelgebiet hindurch in ein zweites zerstreues Feld. Die Brechkraft nimmt so stark ab, daß sich nun wieder ein Zerstreuungsspiegel ausbildet (Abb. 16d). Wir können somit in einfachster Weise aus dem Potentialbild qualitativ die tatsächlich beobachteten elektronenoptischen Eigenschaften erklären. Die diesen Vorgang darstellende Bilderreihe ist in Abb. 18 wiedergegeben.

Wie bereits erwähnt, kann das Potential U_k der Kugelschale noch variiert werden. Wir haben es in Sprüngen von 250 Volt

mit der Abb. 15. Die Kurven zeigen alle den gleichen Charakter; es braucht daher nicht näher auf diese Abbildung eingegangen zu werden. Bei positiver Spannung der abschließenden Kugelschale

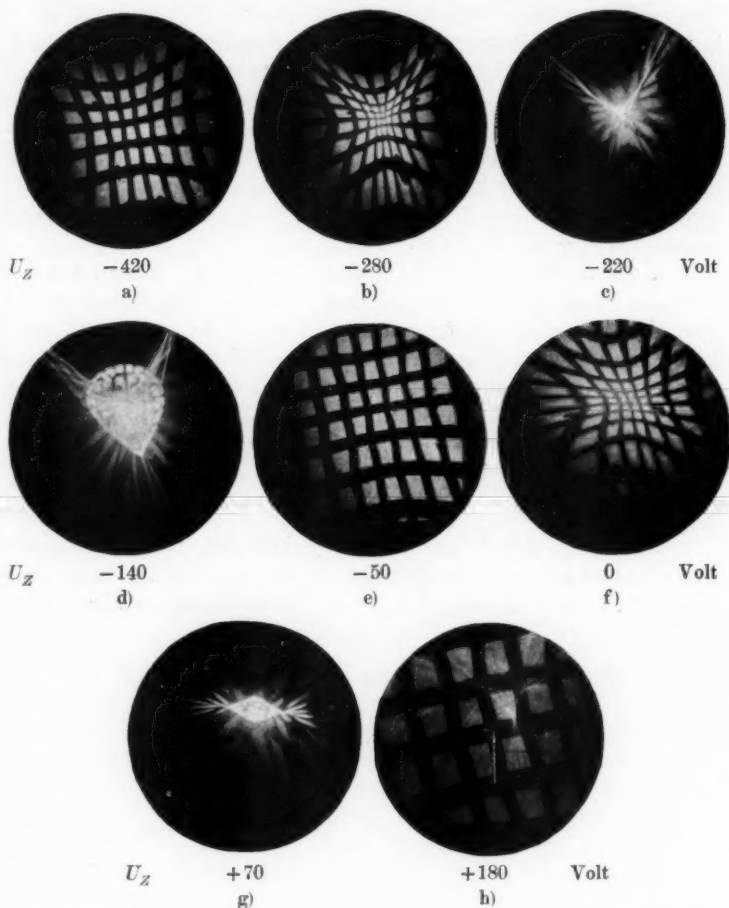


Abb. 18. Spiegelbilder mit System Abb. 15 erhalten bei $U_A = 750$ Volt und $U_K = -250$ Volt

werden die Elektronen natürlich nur bei stark negativem Potential am Zwischenzylinder reflektiert. Wird es positiv, so gelangen die Elektronen auf die Abschlußplatte; man erhält kein gespiegeltes Bild mehr.

Zusammenfassung

1. Es werden Potentialfelder verschiedener Art auf ihre Eigenschaften als Elektronenspiegel experimentell untersucht. Brauchbare Spiegelbilder werden hergestellt. Daraus ergibt sich, daß Störfelder, insbesondere Raumladungen, die Bilder nicht wesentlich beeinträchtigen.

2. Einzellinsen werden als spiegelnde Elemente der Untersuchung unterzogen. Es zeigt sich, daß diese Linsen als Sammelspiegel mit starken sphärischen Fehlern behaftet und nur als Zerstreuungsspiegel praktisch verwertbar sind. Die Ergebnisse stehen mit der Theorie im Einklang. — Der Übergang von der Einzellinse zum Spiegel wird vom Gesichtspunkt der Intensitätssteuerung eines Elektronenbündels betrachtet.

3. Es werden besondere, aus zwei und mehr Elektroden bestehende Spiegelsysteme gebaut, ihre Potentialfelder festgelegt und ihre Abbildungseigenschaften untersucht, wobei sich zeigt, daß auch brauchbare Sammelspiegel erzielbar sind. Bei diesen „eigentlichen“ Spiegeln ist im Gegensatz zur Einzellinse eine aufgeladene Metallfläche senkrecht zur optischen Achse aufgestellt. Kommen die Elektronen dieser Metallfläche sehr nahe, ohne sie jedoch zu erreichen, so prägen sich dem Bilde die Unebenheiten dieser Elektrode auf, wir erhalten eine Wiedergabe ihrer Oberfläche.

Vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Laboratorium des Forschungs-Instituts der AEG. im Jahre 1936 auf Anregung von Herrn Dr. Brüche durchgeführt. Ich danke besonders auch Herrn Dr. Recknagel für viele Ratschläge.

Berlin-Reinickendorf, im Juli 1937.

(Eingegangen 1. September 1937)

**Der Einfluß magnetischer Felder
auf die innere Reibung von Gasen¹⁾**

Von Hermann Senftleben und Heinz Gladisch

(Mit 6 Abbildungen)

Das Wärmeleitvermögen paramagnetischer Gase wird, wie eingehende Messungen von H. Senftleben²⁾ und H. Senftleben und J. Pietzner³⁾ gezeigt haben, durch ein Magnetfeld verkleinert. Nach allen bisher vorliegenden Untersuchungen, insbesondere denen über die Temperaturabhängigkeit, ist der Effekt auf eine Änderung des Wirkungsquerschnittes oder, was gleichbedeutend ist, der mittleren freien Weglänge der Moleküle zurückzuführen. Bei Zugrundelegung dieser Annahme ist nach der kinetischen Gastheorie auch eine magnetische Beeinflussung der inneren Reibung der Gase zu erwarten, da ja der Wärmeleitungskoeffizient wie auch der Reibungskoeffizient in einfacher Beziehung zu dem Wirkungsquerschnitt stehen, gemäß den Formeln:

$$\lambda = \frac{f \cdot k \cdot \bar{c}}{6 \sigma}, \quad \eta = \frac{m \bar{c}}{3 \sigma}$$

(k Boltzmannsche Konstante, \bar{c} mittlere Geschwindigkeit der Gas-moleküle, σ Wirkungsquerschnitt eines Moleküls, f Zahl der Freiheitsgrade).

Von diesen Überlegungen ausgehend haben Engelhardt und Sack⁴⁾, sowie Trautz und Fröschel^{5) 6)} Versuche über die Beeinflussung der inneren Reibung von Gasen in Magnetfeldern angestellt. Übereinstimmend fanden die Autoren eine Änderung des Reibungskoeffizienten der untersuchten Gase, im übrigen aber gingen die Ergebnisse vollkommen auseinander. Trautz und Fröschel fanden den Effekt als abhängig vom Druck des Gases (in gewisser Analogie zu den Beobachtungen beim Wärmeleitungseffekt). Auch Engelhardt

1) Nach der von der philosophischen und naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Münster angenommenen Dissertation von H. Gladisch.

2) H. Senftleben, Phys. Ztschr. **31**. S. 822, 961. 1930.

3) H. Senftleben u. J. Pietzner, Ver. I, Ann. d. Phys. [5] **16**. S. 907. 1933; Ver. II, Ann. d. Phys. [5] **27**. S. 108. 1936; Ver. III, Ann. d. Phys. [5] **27**. S. 117. 1936.

4) H. Engelhardt u. H. Sack, Phys. Ztschr. **33**. S. 724. 1932.

5) M. Trautz u. E. Fröschel, Phys. Ztschr. **33**. S. 947. 1932.

6) M. Trautz u. E. Fröschel, Ann. d. Phys. [5] **22**. S. 223. 1935.

und Sack stellten ursprünglich eine solche Druckabhängigkeit fest, spätere Arbeiten von Sack¹⁾ ergaben aber Unabhängigkeit des Effektes vom Druck. Diese Differenzen sind dadurch begreiflich, daß der Effekt außerordentlich klein ist (im Maximum 0,5%) und besondere Meßmethoden ausgearbeitet werden müssen, um ihn nachzuweisen. Andererseits erscheint es sehr wichtig, auch die Änderung der inneren Reibung von paramagnetischen Gasen in Magnetfeldern quantitativ zu erfassen, weil sich hier ein neuer Weg bietet, um dem Mechanismus der Einwirkung eines magnetischen Feldes auf die Stoßprozesse in Gasen näher zu kommen. Es wurde darum versucht, mit einer ganz neuen Methode das gestellte Ziel zu erreichen. Dies ist weitgehend gelungen. Über die Methode und die gefundenen Ergebnisse soll im folgenden berichtet werden.

Meßmethode und Versuchsanordnung

Das Prinzip der Methode besteht darin, daß das zu untersuchende Gas aus einem Reservoir, in dem es unter dem Druck p steht, durch eine Kapillare, die dem Magnetfeld ausgesetzt werden kann, in ein Gefäß strömt, das an eine dauernd arbeitende Pumpenanlage angeschlossen ist. Der Druck in dem Gefäß ändert sich so lange, bis durch die Kapillare ebensoviel Gas hinzuströmt wie durch die Pumpen abgesaugt wird. Wird nun bei Anlegen des Magnetfeldes der Reibungskoeffizient des Gases und damit die in der Zeiteinheit überströmende Gasmenge geändert, so wird sich auch der Druck im Meßgefäß ändern und den der jetzt strömenden Menge entsprechenden Wert annehmen.

Die Größe des sich einstellenden Enddruckes ist proportional der pro Zeiteinheit einströmenden Gasmenge v , d. h.

$$p = c \cdot v.$$

Die relative Druckänderung ist damit

$$\frac{dp}{p} = \frac{dv}{v},$$

nun ist weiter nach dem Gesetz von Poiseuille die einströmende Menge v umgekehrt proportional dem Reibungskoeffizienten η

$$v = \frac{1}{\eta} \cdot \text{const.}$$

Daraus folgt

$$\frac{dv}{v} = - \frac{d\eta}{\eta} = \frac{dp}{p},$$

d. h. die Änderung des Reibungskoeffizienten ist durch die Messung einer Druckänderung faßbar.

1) H. Sack, Leipziger Vorträge 1933. S. 25; Helv. Phys. Acta 7. S. 639. 1935.

Nach den in der Einleitung ausgeführten Betrachtungen sind die zu erwartenden Änderungen der inneren Reibung und damit des Druckes sehr klein. Um sie einer genaueren Messung zugänglich zu machen, erschien es ratsam, die Methode zu einer Differenzmethode auszubauen.

Zu diesem Zweck wurde das Gas aus dem Vorratsballon auf zwei genau gleichen Wegen zur absaugenden Pumpe geleitet. Die in dem einen Weg befindliche Kapillare konnte einem Magnetfelde ausgesetzt werden. Strömt das Gas auf beiden Wegen, so stellen sich in diesen überall die gleichen Druckverhältnisse ein. Die Gleichheit dieser Verhältnisse bleibt allen äußeren Störungen und Schwankungen gegenüber bestehen, die die *gesamte* Apparatur betreffen. Solche Störungen sind unvermeidbar und sind bedingt 1. durch ein Absinken des Druckes im Reserveballon, 2. durch ungleichmäßiges Ziehen der Pumpen, 3. durch Temperaturschwankungen. Wird nun die eine Kapillare dem Magnetfelde ausgesetzt, so tritt in dem betreffenden Wege des Gases eine Änderung der Druckverteilung ein, während diese auf dem anderen Wege unverändert bleibt. Es handelt sich nun darum, die hierdurch entstehende Druckdifferenz, die nur durch das Magnetfeld bedingt ist und durch die oben genannten Störungen nicht beeinflußt wird, zu messen.

Zur Druckmessung diente ein Hitzdrahtmanometer nach Pirani. Bei diesem wird der Druck durch die Temperatur eines elektrisch geheizten Drahtes gemessen, die sich mit dem Druck des umgebenden Gases ändert. Natürlich ist dies nur bei so kleinen Drucken möglich, bei denen die vom Draht abgeleitete Wärmemenge vom Gasdruck abhängig ist. Die Temperaturbestimmung geschieht durch Messung des Drahtwiderstandes. Es ist also die Druckmessung auf eine Widerstandsmessung zurückgeführt, und zwar waren die Drucke so gewählt, daß die Widerstandsänderungen proportional den Druckänderungen waren.

Eine solche Druck-Widerstandsmessung wurde nun auf beiden Wegen vorgenommen, die beiden Meßdrähte waren in einer Wheatstoneschen Brückenordnung gegeneinander geschaltet. Dies hatte die Folge, daß Druckänderungen, die auf beiden Wegen eintraten und gleiche Widerstandsänderungen bewirkten, sich in der Wheatstoneschen Brücke kompensierten und nicht merkbar waren. Die oben erwähnte einseitige durch das Magnetfeld bewirkte Druckänderung dagegen mußte sich in einem Ausschlag des Nullinstrumentes bemerkbar machen.

Die Einzelheiten der Apparatur sind aus Abb. 1 zu entnehmen. Aus dem Reserveballon B_G , in dem sich das Gas unter dem Druck p

befindet, strömt es nach Öffnung des Hahnes H durch die beiden Wege W_M und W_O , gelangt durch die Kapillaren K_M und K_O in die Gefäße G_M und G_O , in denen die Druckmessung vorgenommen wird. Von dort wird das Gas über große Puffervolumina dauernd von einem Pumpenaggregat, bestehend aus einer 3stufigen Diffusionspumpe mit vorgeschalteter rotierender Kapselpumpe abgesaugt. Dieses Pumpenaggregat konnte auch dazu verwandt werden, um die ganze Anordnung bis zu einem Vakuum von $1 \cdot 10^{-5}$ mm Hg zu evakuieren. Der Druck wurde mit einem Manometer nach MacLeod gemessen.

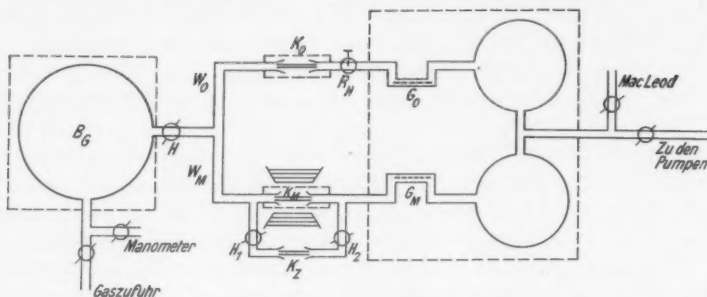


Abb. 1. Versuchsanordnung

Der Gasballon B_G hatte einen Inhalt von ungefähr 8000 cm^3 . Dieses Volumen reichte aus, um bei geeignet gewählter Kapillare während einer Messung hinreichende Konstanz des Druckes p zu gewährleisten. Die maximale Druckänderung in B_G überstieg während einer Messung nicht $3-4\%$. Für die Versuche wurden vier verschiedene Kapillaren benutzt, die annähernd gleiche Form und Länge besaßen, sich aber in ihrem Durchmesser unterschieden. Die Maße der Kapillaren sind folgende:

Tabelle 1

Kapillare	Länge in mm	Durchmesser in mm	Druckintervall in mm Hg
I	140	0,18	100—200
II	135	0,14	150—400
III	140	0,21	40—150
IV	130	0,12	200—700

In der letzten Spalte von Tab. 1 sind die Druckintervalle angegeben, bei denen die einzelnen Kapillaren zu benutzen waren, ohne daß eine zu schnelle Änderung des Druckes im Gasballon B_G oder ein zu langsames Einstellen des Enddruckes bei Änderung der Reibung

in den Meßgefäßen zu befürchten gewesen wäre. Da einige gleiche Drucke in verschiedenen Kapillaren gemessen wurden, hätte eine eventuell vorhandene Abhängigkeit des Effektes vom Kapillardurchmesser festgestellt werden können. Die Kapillaren waren durch Schliffe in die Apparatur eingesetzt und konnten jederzeit ausgewechselt werden.

In den Strömungsweg W_0 war hinter die Kapillare K_0 ein Regulierhahn R_H eingebaut, mit dessen Hilfe die nun einmal experimentell nicht zu vermeidende Ungleichheit der beiden Kapillaren K_M und K_0 weitgehend ausgeglichen werden konnte. Als Regulierhahn wurde ein für diese Zwecke besonders hergestelltes fettloses hochvakuumdichtes Metallventil nach F. Durau¹⁾ benutzt.

Das Puffervolumen, welches das ungleichmäßige Ziehen der Pumpen, sowie ein Stoßen derselben ausgleichen sollte, bestand aus 2 Glaskugeln von ungefähr je 3000 cm³ Inhalt. Die Meßgefäße, die als Manometer dienten, hatten eine Länge von ungefähr 80 mm und 8 mm Durchmesser. In der Achse derselben war ein Platindraht von 70 mm Länge und 0,03 mm Durchmesser gespannt.

Der größte Teil der Apparatur befand sich, wie aus Abb. 1 ersichtlich, in Wasserbädern, was besonders bei den Kapillaren und den Meßgefäßen notwendig war, denn die geringste Änderung der Temperatur der die Kapillaren umgebenden Luft, wie sie etwa durch die Erwärmung des Magneten hervorgebracht wurde, änderte den Reibungskoeffizienten und machte genaue Messungen unmöglich. Bei der Empfindlichkeit der Meßgefäße gegen Temperaturänderungen versteht sich der Vorzug des Wasserbades von selbst. Die restlichen Teile der Apparatur waren durch Einwickeln in Wattelin gegen etwaige Luftströmungen geschützt.

Zur Erzeugung des Magnetfeldes stand ein gewöhnlicher Elektromagnet zur Verfügung. Für die Messungen wurden zylindrische Polschuhe mit einem Durchmesser von 50 mm benutzt. Da zwischen die Pole des Magneten außer der Kapillare noch das diese umgebende Wasserbad gebracht werden mußte, wurde mit einem Polabstand von etwa 16 mm gearbeitet. Das maximal erreichte Magnetfeld betrug etwa 7000 Gauss. Die Feldmessung geschah mit einer Induktionsspule, ferner wurden Kontrollmessungen mit einer Wismutspirale vorgenommen.

Untersucht wurden die beiden hier einzig in Frage kommenden paramagnetischen Gase Sauerstoff und Stickoxyd. Der Sauerstoff wurde ohne besondere Reinigung direkt den gewöhnlichen Gasstahl-

1) F. Durau, Ztschr. f. Phys. 89. S. 143. 1934.

flaschen entnommen. Das Stickoxyd wurde durch Reduktion von Kaliumnitritlösung mit Jodwasserstoffsäure gewonnen. Es wurde mit Kalilauge und 90%iger Schwefelsäure gewaschen und dann noch mit Phosphorperoxyd getrocknet¹⁾.

Wie bereits oben gesagt, waren die beiden Hitzdrahtmanometer in einer Wheatstoneschen Brücke gegeneinander geschaltet. Die Einzelheiten der elektrischen Anordnung sind aus Abb. 2 ersichtlich.

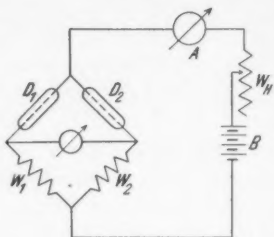


Abb. 2

Der Strom wurde einer Akkumulatorenbatterie B entnommen und über einen fein regulierbaren Widerstand W_H der Brücke zugeführt, in deren jedem Ast der Meßdraht eines Manometers D_1 bzw. D_2 und ein fester Widerstand W_1 bzw. W_2 lagen. Durch Einregulieren von W_H kann man nun erreichen, daß der für die richtige Heizung der Meßdrähte erforderliche Strom durch die beiden annähernd gleichen Äste der

Brücke fließt. Die Temperaturdifferenz zwischen Wand und geheiztem Draht betrug etwa 80° . Eine Druck- oder Temperaturschwankung, die in beiden Gefäßen gleich stark auftritt, ändert zwar den Widerstand der Drähte, das Brückengalvanometer bleibt aber in Ruhe, falls beide Manometer genau gleiche Empfindlichkeit haben. Als Brückeninstrument wurde ein Mollssches Mikrogalvanometer mit einer Empfindlichkeit von $2,5 \cdot 10^{-8}$ Amp. benutzt, das wegen seiner verhältnismäßig großen Spannungsempfindlichkeit und vor allem kurzen Einstelldauer besonders geeignet war.

Wird an die eine Kapillare das Magnetfeld gelegt, so ändert sich die Reibung, dadurch der Enddruck in G_M . Die dadurch hervorgerufene Widerstandsänderung des Drahtes macht sich durch den Ausschlag des Nullinstrumentes bemerkbar. Es handelt sich nun darum, aus diesem Ausschlag die Änderung des Reibungskoeffizienten zu berechnen.

Zuerst werden die Verhältnisse in einem Meßgefäß betrachtet. Mit i sei die Stromstärke im Meßdraht, mit ω dessen Widerstand in geheiztem und mit ω_0 in ungeheiztem Zustand bezeichnet. Die Energiebilanz zwischen zugeführter und abgeleiteter Energie liefert, wenn der durch Ableitung an den Zuführungsstellen und durch Strahlung bewirkte Energieverlust vernachlässigt wird, die Beziehung

$$(1) \quad i^2 \cdot \omega = \lambda \cdot \Delta T.$$

1) Für die Herstellung des Gases sind wir Herrn cand. phil. H. Torwegge zu Dank verpflichtet.

Dabei bedeutet ΔT die Temperaturdifferenz zwischen geheiztem Draht und Wand des Meßgefäßes, λ ein Maß für die Wärmeleitung und damit, wie oben erwähnt, für den Druck des Gases. Ändert sich nun der Druck im Meßgefäß um dp und damit das Wärmeleitvermögen um $d\lambda$, so ergibt sich

$$(2) \quad 2i\omega di + i^2 d\omega = d\lambda \Delta T + \lambda d(\Delta T)$$

und nach Division durch Gl. (1)

$$(3) \quad 2 \frac{di}{i} + \frac{d\omega}{\omega} = \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{d(\Delta T)}{\Delta T},$$

oder da bei den in Frage kommenden Drucken das Wärmeleitvermögen proportional dem Druck p und damit

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dp}{p}$$

ist

$$2 \frac{di}{i} + \frac{d\omega}{\omega} = \frac{dp}{p} + \frac{d(\Delta T)}{\Delta T}.$$

Da die Temperaturabhängigkeit des Widerstandes bekannt ist, kann

$$\frac{d(\Delta T)}{\Delta T} \quad \text{durch} \quad \frac{d\omega}{\omega - \omega_0}$$

ersetzt werden. Es ergibt sich:

$$(4) \quad d\omega = \frac{\omega(\omega - \omega_0)}{\omega_0} \left(\frac{2di}{i} - \frac{dp}{p} \right) = \Delta \left(\frac{2di}{i} - \frac{dp}{p} \right).$$

Diese Gleichung gilt für beide Meßgefäße, die im folgenden durch ' und '' unterschieden werden sollen. Die Differenz der Widerstandsänderungen in den beiden Meßgefäßen ist also, wenn die Drucke sich in ihnen um dp' bzw. dp'' ändern:

$$(5) \quad d\omega' - d\omega'' = \Delta' \left(\frac{2di'}{i'} - \frac{dp'}{p'} \right) - \Delta'' \left(\frac{2di''}{i''} - \frac{dp''}{p''} \right).$$

Es handelt sich nun darum $\frac{di'}{i'}$ und $\frac{di''}{i''}$ durch die elektrischen Konstanten der Apparatur auszudrücken. Sind W_H Heizwiderstand, W_1 und W_2 die festen Widerstände der beiden Brückenarme, so gilt

$$\begin{aligned} \frac{di'}{i'} &= - \frac{W_H + w'' + W_2}{\{W_H[w' + W_1 + w'' + W_2] + [w' + W_1][w'' + W_2]\}} dw' \\ &\quad - \frac{W_H + w' + W_1}{\{ \}} dw'' + \frac{dw''}{w'' + W_2}, \\ \frac{di''}{i''} &= - \frac{W_H + w' + W_1}{\{W_H[w' + W_1 + w'' + W_2] + [w' + W_1][w'' + W_2]\}} dw'' \\ &\quad - \frac{W_H + w'' + W_2}{\{ \}} dw' + \frac{dw'}{w' + W_1}. \end{aligned}$$

Im vorliegenden Falle konnte durch geeignete Wahl der Meßdrahtlängen erreicht werden, daß $w' = w''$ war, außerdem wurden für W_1 und W_2 zwei gleich große Stöpselwiderstände benutzt. Berücksichtigt man dies, und setzt man die Werte für $\frac{d i'}{i'}$ und $\frac{d i''}{i''}$ in Gl. (5) ein, so vereinfacht sich diese zu folgender Beziehung:

$$d w' - d w'' = - \frac{\Delta}{1 + \frac{2 \Delta}{w + W}} \left(\frac{d p'}{p'} - \frac{d p''}{p''} \right).$$

Bei Einschalten des Magnetfeldes ändert sich nur p' , es ist also für diesen Fall $d p'' = 0$ und

$$d w' - d w'' = - \frac{\Delta}{1 + \frac{2 \Delta}{w + W}} \cdot \frac{d p'}{p'}.$$

Der Ausschlag α des Brückengalvanometers ist der Differenz $d w' - d w''$ proportional, also

$$\alpha = A \cdot \frac{d p'}{p'}.$$

Wie S. 714 gezeigt worden ist, ist $\frac{d p'}{p'} \sim \frac{d \eta}{\eta}$. Die relative Änderung der inneren Reibung ist also bei der Versuchsanordnung proportional α .

Um die Absolutwerte der Änderung der inneren Reibung angeben zu können, mußte das Galvanometer mit einer bekannten Reibungsänderung geeicht werden. Dies geschah auf folgendem Wege. Parallel zur Magnetkapillare K_M wurde eine zweite Kapillare K_Z gelegt (vgl. Abb. 1), die durch die Hähne H_1 und H_2 von der übrigen Apparatur abgeschlossen war. Strömt das Gas nur durch K_M , so tritt in G_M in der Zeit t die Gasmenge $v = \frac{a \cdot t}{\eta}$ ein. Wird nun H_1 und H_2 geöffnet, so strömt durch K_Z die zusätzliche Gasmenge Δv über. Dieselbe Vergrößerung der überströmenden Gasmenge könnte aber auch durch eine entsprechende Verkleinerung des Reibungskoeffizienten erreicht werden. In diesem Falle würde

$$\Delta v = - \frac{a \cdot t}{\eta^2} \cdot \Delta \eta$$

sein. Die gesamte durchströmende Menge ist:

$$V = v + \Delta v = \frac{a \cdot t}{\eta} \left[1 - \frac{\Delta \eta}{\eta} \right].$$

Dieselbe Menge V würde durch die Kapillare K_M allein in der Zeit $t + \Delta t$ strömen.

Dann würde gelten

$$V = \frac{a}{\eta} t \left[1 + \frac{\Delta t}{t} \right].$$

Führt man nun eine Messung in der Weise durch, daß man 1. die Zeit t beobachtet, in der ein bestimmtes Volumen V durch beide Kapillaren gleichzeitig strömt und 2. die Zeit $t + \Delta t$ beobachtet, die dasselbe Volumen V zum Durchströmen der Kapillare K_M allein gebraucht, so folgt durch Gleichsetzen der beiden obigen Gleichungen für V

$$-\frac{\Delta \eta}{\eta} = \frac{\Delta t}{t}.$$

Versteht man unter $\Delta \eta$ eine Abnahme der inneren Reibung, so fällt das Minuszeichen weg.

Auf diese Weise konnte für die Kapillaren durch geeignet gewählte Zusatzkapillaren eine bestimmte äquivalente Reibungsänderung festgelegt und damit der Proportionalitätsfaktor zwischen Galvanometerausgang und Änderung der inneren Reibung bestimmt werden¹⁾. Die Eichung des Galvanometers geschah unmittelbar vor Beginn jeder Messung, sofort nach Beendigung derselben wurde der Eichungsfaktor nachgeprüft. Die Differenz der am Anfang und Ende gefundenen Werte überstieg nie 2–3⁰/₀.

Die mit dieser Methode bisher gefundenen Absolutwerte für die relative Änderung des Reibungskoeffizienten gelten nicht für einen bestimmten Druck, sondern sind Mittelwerte, da ja längs der Kapillare ein Druckabfall herrscht. Dieser Druckabfall ist sehr beträchtlich, da der Druck am Ende der Kapillare, im Meßgefäß, etwa $\frac{1}{10}$ mm Hg, also praktisch Null ist gegenüber den Anfangsdrücken, die von 50 mm Hg bis zu 700 mm Hg variiert werden. Es fragt sich, wie man aus den für solch große Druckintervalle gemessenen Mittelwerten des Effektes $\bar{\epsilon} = \frac{\Delta \eta}{\eta}$ den wahren Wert von ϵ als Funktion von p ermittelt.

1) Auch aus Länge und Durchmesser der verwandten Magnetfeld- und Zusatzkapillaren konnte die dem Zuschalten der Zusatzkapillare äquivalente Reibungsänderung berechnet werden, was jedoch eine vollkommene Kenntnis der in die Rechnung eingehenden geometrischen Größen voraussetzte. Die genaue Kenntnis von Durchmesser und Länge war nur bei zwei Kapillaren erfüllt, während bei den beiden anderen sich der Durchmesser ein wenig mit der Länge der Kapillare änderte und daher nicht so genau, wie es die Rechnung verlangt, angegeben werden konnte. Als Beispiel für die Übereinstimmung der auf die beiden Arten bestimmten äquivalenten Reibungsänderungen seien hier die Ergebnisse von Kapillare 1 mit Zusatzkapillare I angegeben.

Künstliche $\Delta \eta / \eta$ -Bestimmung

- | | |
|---|---------|
| 1. durch Strömungsmethode | – 0,123 |
| 2. durch Rechnung aus bekanntem Durchmesser und Länge | – 0,119 |

Ist $\varepsilon(p)$ dieser wahre Wert, so folgt für den Mittelwert ganz allgemein

$$\bar{\varepsilon}(p) = \frac{1}{p} \int_0^p \varepsilon(p) dp \quad \text{oder} \quad \bar{\varepsilon}(p) \cdot p = \int_0^p \varepsilon(p) dp.$$

Differentiation nach der oberen Grenze ergibt

$$\bar{\varepsilon}(p) + p \frac{d\bar{\varepsilon}(p)}{dp} = \varepsilon(p).$$

$\bar{\varepsilon}(p)$ ist die Größe, welche gemessen wird als Funktion des Druckes p im Vorratsballon B_G . Die Kurve $\bar{\varepsilon} = f(p)$ läßt sich konstruieren und ergibt die Werte des Differentialquotienten $\frac{d\bar{\varepsilon}(p)}{dp}$. Mittels der letzten Gleichung ist der zu p gehörende wahre Effektwert ε zu berechnen.

Die Genauigkeit der Messungen von $\bar{\varepsilon}$ ist etwa 2%, durch die graphische Auswertung sind die Werte von ε etwas ungenauer, ihre Schwankung beträgt etwa 5–6%.

Hingewiesen sei noch darauf, daß die Magnetostriktion keine störende Rolle spielen konnte, da der von ihr herrührende Einfluß auf die Strömung höchstens 1% des beobachteten Effektes ausmachen kann.

Ergebnisse der Messungen

Zunächst soll die Abhängigkeit des Effektes, unter dem die Größe

$$\varepsilon = - \frac{\eta(\text{mit Feld}) - \eta(\text{ohne Feld})}{\eta(\text{ohne Feld})} = - \frac{\Delta\eta}{\eta}$$

verstanden ist, von der Feldstärke untersucht werden. Abb. 3 zeigt die Verhältnisse für große Drucke. Hier ist als Abszisse die Feldstärke in Gauss und als Ordinate die relative Verminderung des Reibungskoeffizienten aufgetragen. Die ausgezogenen Linien sind Kurven gleichen Druckes. Alle Kurven zeigen den gleichen Verlauf, ein mit zunehmender Feldstärke zunächst rasches, dann allmählich langsamer werdendes Ansteigen des Effektes, der bei genügend hoher Feldstärke einem Sättigungswert zuzustreben scheint. Mit steigendem Druck verschieben sich die Kurven zu kleineren Effektwerten, die relative Änderung des Reibungskoeffizienten wird also mit abnehmendem Druck größer. Sowohl die Tatsache der Druckabhängigkeit des Effektes wie auch der quantitative Verlauf erscheinen als sichergestellt. Das wichtigste Ergebnis, das man aus dieser Darstellung entnehmen kann, ist die Tatsache, daß Feldstärke und Druck so auf den Effekt einwirken, daß dieser in dem hier untersuchten Gebiet nur eine Funktion des Quotienten dieser beiden Variablen, d. h. der Größe H/p

ist. Aus Abb. 3 kann man ersehen, daß diese Gesetzmäßigkeit im allgemeinen gut erfüllt ist. Die Abhängigkeit des Effektes von H/p prüft man, wie an dem folgenden Beispiel für das Argument $H/p = 5$ gezeigt ist, auf folgende Weise. Für dieses Argument muß bei dem Druck von 650 mm Hg und der Feldstärke von 3250 Gauss

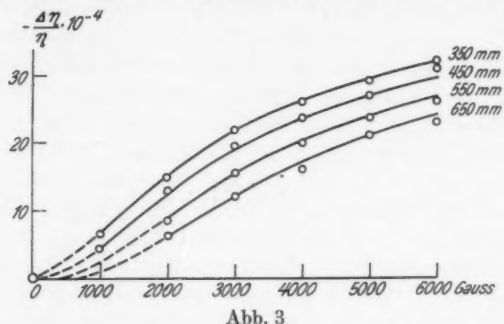


Abb. 3

derselbe Effekt gefordert werden wie für den Druck von 550 mm Hg und die Feldstärke von 2750 Gauss oder für den Druck von 450 mm Hg und die Feldstärke von 2250 Gauss. Der Effekt hat innerhalb der Fehlergrenzen den Wert $13,5 \cdot 10^{-4}$.

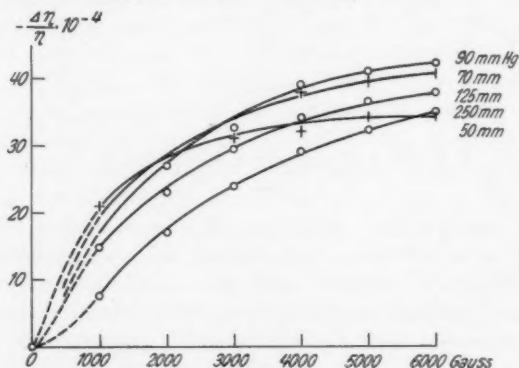


Abb. 4

In Abb. 3 sind nur die Kurven, welche Drucken oberhalb 350 mm Hg entsprechen, eingezeichnet. Die Messungen bei kleineren Drucken sind in Abb. 4 angegeben. Auch hier sind Kurven konstanten Druckes dargestellt. In diesem Druckbereich (50—250 mm Hg) tritt nun ein ganz anderes Verhalten des Effektes auf. Während normalerweise einem größeren Druck ein kleinerer Effektwert

entspricht, zeigt sich in diesem Gebiet, daß nur bei kleinen Feldstärken die Kurven niedrigeren Druckes über denen höheren Druckes verlaufen. Mit steigender Feldstärke überschneiden die Kurven einander, so daß zu kleineren Drucken auch kleinere Effektwerte gehören. Dieses Verhalten sei an zwei Kurven der Abb. 4, der 50 und 125 mm-Kurve, erläutert. Die 50 mm-Kurve läuft bei kleinen Feldstärken zunächst über der 125 mm-Kurve, schneidet diese bei ungefähr 3500 Gauss, um dann unter der 125 mm-Kurve zu verlaufen. Es ist einzusehen, daß bei einem solchen Verhalten des Effektes, wie es Abb. 4 zeigt, daß H/p -Gesetz nicht mehr gelten kann. Als weiteres Ergebnis ist zu erwähnen, daß die Sättigung des Effektes, welche in den Kurven der Abb. 4 nur angedeutet scheint, weil die Messungen nicht bis zu genügend hohen Feldstärken ausgedehnt werden konnten, hier bei einigen Drucken tatsächlich erreicht wird.

In den Abb. 3 und 4 sind die Effektwerte in Abhängigkeit von der Feldstärke H aufgetragen; die verschiedenen Kurven entsprechen verschiedenen Drucken. Der Vollständigkeit wegen, ohne

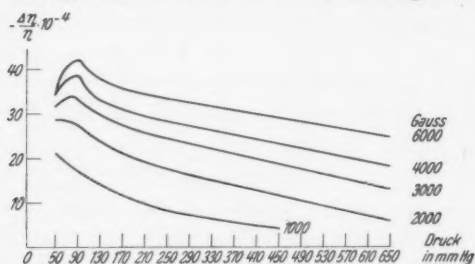


Abb. 5

prinzipiell etwas Neues zu zeigen, sei hier auch noch der Effekt als Funktion des Druckes aufgetragen, man erhält dabei Kurven gleicher Feldstärke. Abb. 5 zeigt die Verhältnisse für den gesamten untersuchten Druckbereich von 50–600 mm Hg. Die einzelnen Effektwerte sind den Abb. 4 und 5 entnommen.

Diskussion der Messungen

Die nach der klassischen kinetischen Gastheorie bestehende weitgehende Ähnlichkeit im Verhalten der Wärmeleitung und inneren Reibung gilt nach den oben dargestellten Ergebnissen auch für die magnetische Beeinflussung beider Größen. Auch die relative Änderung des Wärmeleitvermögens in Magnetfeldern¹⁾ zeigt ein Ansteigen

1) H. Senftleben u. J. Pietzner, Veröffentlichung I.

mit der Feldstärke bis zu einem Sättigungswert und eine Abhängigkeit vom Druck, die mit der oben für die innere Reibung angegebenen parallel geht. Besonders zu betonen ist, daß auch der Wärmeleitungseffekt nur eine Funktion von H/p ist, daß also beide Effekte als Funktionen desselben Arguments anzusehen sind. Gerade die Abhängigkeit vom Quotienten H/p ist ja ein Hauptergebnis der Wärmeleitungsuntersuchungen gewesen.

Die Analogie zwischen dem Verhalten der Reibung und Wärmeleitung geht aber noch wesentlich weiter. Auch bei der Wärmeleitung ist es so, daß das H/p -Gesetz bei kleinen Drucken seine Gültigkeit verliert. Untersuchungen von H. Senftleben und J. Pietzner (vgl. Ver. I, Abb. 5 und Ver. III, Abb. 2) zeigen den gleichen Kurvenverlauf, wie er bei der inneren Reibung in Abb. 4 dargestellt ist. Auch dort überschneiden sich die einzelnen Kurven bei kleinen Drucken. Dies anormale Verhalten bei der Wärmeleitung tritt immer dann ein, wenn der Wärmetransport auch ohne Magnetfeld nicht mehr druckunabhängig ist¹⁾. Diese Abhängigkeit vom Druck ist nicht darin begründet, daß das Wärmeleitvermögen selbst druckabhängig wäre, sondern tritt immer dann ein, wenn die Zahl der Zusammenstöße unter einen bestimmten Wert sinkt (Temperatursprung). Die ausschlaggebende Rolle spielt das Verhältnis der Gefäßdimensionen zur freien Weglänge des Gases. Auf Grund dieser Überlegungen lassen sich auch quantitative Schlüsse ziehen. Beim Wärmeleitvermögen tritt die Ungültigkeit des H/p -Gesetzes und gleichzeitig eine Abhängigkeit des Effektes von den Gefäßdimensionen bei einem Gasdruck von 20–30 mm Hg ein (vgl. H. Senftleben und J. Pietzner, Ver. III, Abb. 3). Der dort verwandte Gefäßdurchmesser liegt in der Größenordnung einiger Millimeter. Bei den Messungen der inneren Reibung ist die Größenordnung des Radius der Kapillaren einige Zehntelmillimeter. Das gleiche Verhältnis zwischen Gefäßdurchmesser und freier Weglänge tritt also bei der inneren Reibung bei Drucken ein, welche mindestens 10 mal größer sind als bei der Wärmeleitung. Diesen Erwartungen entsprechend, treten unterhalb von etwa 300 mm Hg Abweichungen²⁾ vom H/p -Gesetz auf.

1) Über diese Frage sind im hiesigen Institut Untersuchungen von E. Rieger angestellt worden, die eine weitere Klärung gebracht haben und demnächst veröffentlicht werden.

2) Daß man es hier nicht mit einem Ungültigwerden des H/p -Gesetzes zu tun hat, sondern daß das Versagen auf sekundäre Einflüsse zurückzuführen ist, wird in der oben erwähnten Arbeit von E. Rieger genauer ausgeführt werden.

Da sowohl für die Wärmeleitung wie auch für die innere Reibung der Quotient H/p das maßgebende Argument ist, sind in Abb. 6 in Kurve I die Werte von $\Delta\lambda/\lambda$, in Kurve II die Werte $\Delta\eta/\eta$ als Funktion von H/p aufgetragen¹⁾. Die Kurven zeigen

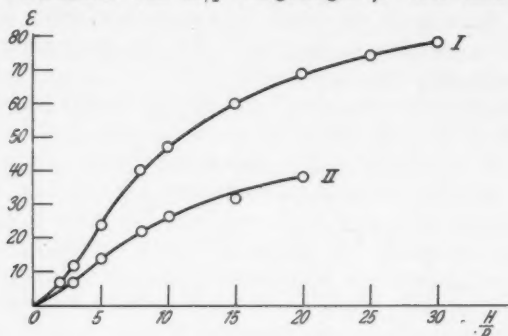


Abb. 6

einen ganz analogen Verlauf. Die quantitative Untersuchung derselben ergibt das bemerkenswerte Resultat, daß das Verhältnis $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} : \frac{\Delta\eta}{\eta}$ unabhängig vom Argument konstant gleich 1,8 ist. Die Genauigkeit dieses Ergebnisses, nach welchem der Wärmeleitungseffekt proportional dem der inneren Reibung ist, geht aus Tab. 2 hervor.

Tabelle 2

H/p	2,5	5	7,5	10	12,5	15	17,5	20
$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} : \frac{\Delta\eta}{\eta}$	2,0	1,75	1,75	1,8	1,8	1,85	1,8	1,85

Aus diesem Resultat ist zu folgern, daß auch eine Einwirkung des Magnetfeldes auf die spezifische Wärme von paramagnetischen Gasen möglich ist. Die Größenordnung dieses Effektes kann aus den obigen Messungen abgeschätzt werden. Unseres Wissens ist bisher ein solcher Effekt nicht gefunden worden, allerdings reichte auch die Meßgenauigkeit der vorliegenden Untersuchungen nicht zu einem Nachweis des Effektes aus²⁾.

1) Hierbei ist wesentlich zu berücksichtigen, unter welchem Winkel die Richtung der Kraftlinien des magnetischen Feldes zur Richtung der Energie- bzw. Impulsübertragung liegt. In Ver. II ist die Richtungsabhängigkeit des Wärmeleitungseffektes eingehend untersucht worden, und es war auf Grund dieser Arbeit möglich, in Abb. 6 Werte für die innere Reibung und Wärmeleitung zusammenzustellen, die unter gleichen Richtungsbedingungen gemessen worden sind.

2) Im hiesigen Institut werden Untersuchungen in dieser Richtung ausgeführt.

Von theoretischen Untersuchungen über den genannten Effekt liegen bisher nur zwei Arbeiten von M. v. Laue vor¹⁾. Eine experimentelle Auswertung für die Richtungsabhängigkeit des Wärmeleitungseffektes ist bereits vorgenommen worden. Dieselben Messungen für die innere Reibung auszuführen, dürfte an experimentellen Schwierigkeiten scheitern. Anders steht es bei der Frage der Beziehung zwischen innerer Reibung und Wärmeleitung. Da die beiden Effekte vollkommen parallel gehen, ist auch ein analoges Verhalten für die Koeffizienten der Laueschen Entwicklung zu erwarten.

Die vorstehenden Messungen bezogen sich durchweg auf Sauerstoff. Als weiteres paramagnetisches Gas wurde Stickoxyd untersucht. Die Messungen sind wesentlich schwieriger, da die Effekte kleiner sind. Die Abhängigkeit des Effektes von Druck und Feldstärke ist die gleiche wie beim Sauerstoff. Eine Wiedergabe dieser Messungen und genauere Diskussion derselben soll zurückgestellt werden, bis Messungen des Wärmeleitungseffektes an NO, die im hiesigen Institut im Gange sind, fertiggestellt sind.

Zusammenfassung

1. Es wird eine Versuchsanordnung angegeben, mit der es möglich ist, sehr kleine Änderungen bis einige Hundertstel Prozent der inneren Reibung von Gasen nachzuweisen und zu messen.

2. Mit dieser Methode wurde die Einwirkung eines Magnetfeldes auf die innere Reibung von Gasen (O_2 und NO) untersucht.

3. Die Ergebnisse zeigen eine weitgehende Analogie zwischen der Einwirkung eines Magnetfeldes auf die innere Reibung und der auf die Wärmeleitung. Der Einfluß von Feldstärke und Druck ist in beiden Fällen derart, daß nur der Quotient dieser beiden Größen eingeht, d. h. also, daß die Effekte nur Funktionen des Argumentes H/p sind.

4. Innerhalb weiter Grenzen der Variablen H/p ist das Verhältnis der relativen Änderung des Wärmeleitungskoeffizienten zu der des Reibungskoeffizienten konstant.

Der Helmholtzgesellschaft sind wir für die Unterstützung der Arbeit zu großem Dank verpflichtet. Sie stellte uns die Mittel zur Herstellung der komplizierten Glasapparatur sowie einige elektrische Meßinstrumente zur Verfügung.

1) M. v. Laue, Ann. d. Phys. [5] 23. S. 1. 1935; 26. S. 474. 1936.

Münster (Westf.), Physikalisches Institut der Universität, den 24. August 1937.

(Eingegangen 25. August 1937)

Ferromagnetismus und elektrische Eigenschaften

VII. Mitteilung:

Thermokraft, Thomsonkoeffizient und Wärmeleitvermögen von Nickel

Von Anton Hammer¹⁾

(Mit 9 Abbildungen)

Die physikalischen Eigenschaften ferromagnetischer Körper zeigen in der Nähe der Curietemperatur Anomalien, die in Zusammenhang gebracht werden mit der Veränderung des magnetischen Zustands. Präzisionsmessungen liegen vor vom elektrischen Widerstand²⁾, dem Emissionsvermögen für lange Wellen³⁾ und der spezifischen Wärme⁴⁾, nach welchen Beziehungen zwischen der Abweichung vom normalen Verhalten und der spontanen Magnetisierungsenergie, bzw. deren Änderung mit der Temperatur festgestellt wurden. Im folgenden wird in Teil I die differentielle Thermokraft dE/dT von Nickel gegen Kupfer, in Teil II der wahre Wärmewiderstand in Abhängigkeit von der Temperatur gemessen. Die Methoden erlauben ΔT sehr klein zu halten.

Teil I: Differentielle Thermokraft von Nickel gegen Kupfer in Temperaturabhängigkeit

Methode⁵⁾

Die Abb. 1 zeigt schematisch die Versuchsanordnung für die Thermokraftmessung. Zwei Kupferdrähte Cu bilden mit dem Nickeldraht Ni ein Differentialthermoelement. Beide Lötstellen L_1 , L_2 befinden sich in einem Ofen auf gleicher Temperatur $t^\circ \text{C}$. Durch Bestrahlen einer Lötstelle wird eine kleine Temperaturdifferenz ΔT hergestellt und die entstehende Spannung ΔE am Differentialthermo-

1) Dissertation d. Naturwissenschaftlichen Fakultät d. Universität München, 5. 4. 1937. Ref.: Prof. Dr. Walther Gerlach.

2) W. Gerlach u. K. Schneiderhan, Ann. d. Phys. [5] **6**. S. 772. 1930; W. Gerlach, H. Bittel, S. Velayos, Sitzungsberichte der bayer. Akad. d. Wissensch. S. 81. 1936.

3) W. Gerlach, Ann. d. Phys. [5] **25**. S. 209. 1936; E. Löwe, Ann. d. Phys. [5] **25**. S. 214. 1936.

4) E. Lapp, Ann. de phys. **12**. S. 442. 1929; E. Ahrens, Ann. d. Phys. [5] **21**. S. 169. 1934.

5) Die Methode wurde von W. Gerlach zur Verfolgung des Ordnungsvorganges in Cu-Au-Legierungen ausgearbeitet.

element in Abhängigkeit von der Ofentemperatur t bestimmt. Um ΔT zu erhalten, wird durch zwei Konstantandrähte Ko, angelötet an L_1, L_2 , noch ein zweites Differentialthermoelement gebildet. Aus der Messung von $\Delta E_{\text{Ni-Cu}}$ und $\Delta E_{\text{Ni-Ko}}$ bei der gleichen Temperaturdifferenz ΔT erhält man wegen der Additivität der Thermokräfte $\Delta E_{\text{Cu-Ko}}$ und somit aus dem bekannten $\left(\frac{dE}{dT}\right)_{\text{Cu-Ko}}$ auch ΔT . Die mittlere Temperatur T des Nickels liefern die aus den Kupfer- und Konstantandrähten bestehenden Thermolemente. Untersucht wurde Carbonylnickel, das sich als reinste Probe bei den Widerstandsmessungen von W. Gerlach, H. Bittel und S. Velayos¹⁾ erwies.

Versuchsanordnung

An die Enden des 12 cm langen Nickeldrahts (Durchmesser 0,2 mm) wurde je ein Kupfer- und Konstantandraht hart angelötet (Durchmesser 0,25 mm, bzw. 0,27 mm). Zum Bestrahlen der Lötstelle L_1 diente eine Glühlampe, deren Faden auf einem 0,06 mm dicken Kupferplättchen (Flächenausdehnung 25 mm²) abgebildet wurde. Dieser Auffänger war an L_1 hart angelötet und mit Ruß auf der bestrahlten Seite geschwärzt (Abb. 2). Der Nickeldraht wurde so gebogen, daß die Gegenlötstelle L_2 5 mm hinter dem Auffangplättchen A in dessen Schatten saß. Die Thermolementanordnung saß in einem mit einer Glasplatte abgedichteten Glasrohr, welches von dem 25 cm langen, bifilar gewickelten elektrischen Ofen umgeben war. Diesen umgab ein weiteres Rohr, an dessen einem Ende die Linse aufgekittet war, welche den Faden der Glühlampe auf den Auffänger abbildete; beide Rohre wurden getrennt evakuiert.

Da die durch die Bestrahlung erzeugte Temperaturdifferenz während der Messung konstant sein mußte, wurde die Strahlung der

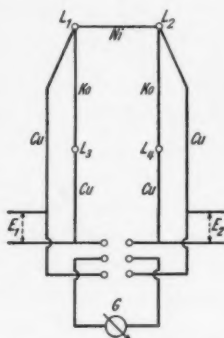


Abb. 1. Schematische Schaltung der Thermolementanordnung. L_1, L_2, L_3, L_4 Lötstellen. L_1 und L_2 im Ofen auf $t^\circ\text{C}$. L_3 und L_4 außerhalb des Ofens auf 0°C . G Panzer-galvanometer. E_1 und E_2 Thermospannungen, welche die Temperatur von L_1 und L_2 liefern

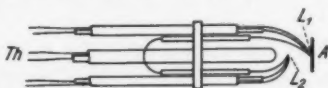


Abb. 2. L_1 und L_2 Lötstellen im Ofen. n Hilfsthermoelement, A Auffänger

1) W. Gerlach, H. Bittel u. S. Velayos, a. a. O., S. 88.

Glühlampe durch ein von der übrigen Apparatur getrenntes, aber in gleicher Weise angeordnetes und bestrahltes Kupfer-Konstantan-Thermoelement überwacht.

a) Die Messung von $\Delta E/\Delta T$

Während sich ΔE als Spannung am Differentialthermoelement Nickel-Kupfer ergibt, muß ΔT aus den Spannungen an den beiden Thermoelementen Nickel-Kupfer und Nickel-Konstantan berechnet werden.

Es gilt:

$$\Delta E_{\text{Cu-Ko}} = \Delta E_{\text{Cu-Ni}} + \Delta E_{\text{Ni-Ko}}.$$

Ist dE/dT von Kupfer-Konstantan bekannt, so ist:

$$\Delta T = \Delta E_{\text{Cu-Ko}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{dE}{dT}\right)_{\text{Cu-Ko}}}.$$

Also:

$$\left(\frac{\Delta E}{\Delta T}\right)_{\text{Ni-Cu}} = \frac{\Delta E_{\text{Ni-Cu}}}{\Delta E_{\text{Cu-Ni}} + \Delta E_{\text{Ni-Ko}}} \cdot \left(\frac{dE}{dT}\right)_{\text{Cu-Ko}}.$$

Die Spannungen wurden mit einem Panzergalvanometer (Reduktionsfaktor: $\sim 1,5 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Volt}}{\text{Skalenteil}}$) gemessen. Wegen des verschiedenen Widerstands des Kupfer-Nickel- und Konstantan-Nickel-Thermoelements waren die Reduktionsfaktoren C verschieden. Man mußte nur ihr Verhältnis kennen; dann folgt:

$$\Delta E_{\text{Cu-Ni}} = C_1 \varphi_1$$

$$\Delta E_{\text{Ni-Ko}} = C_2 \varphi_2$$

$$\left(\frac{\Delta E}{\Delta T}\right)_{\text{Ni-Cu}} = - \frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \frac{C_2}{C_1} \varphi_2} \cdot \left(\frac{dE}{dT}\right)_{\text{Cu-Ko}}.$$

Das Verhältnis C_2/C_1 ($\sim 1,2$) wurde dadurch bestimmt, daß eine kleine Spannung unter Einschaltung des Kupfer-Nickel-, bzw. des Konstantan-Nickel-Thermoelements an das Instrument gelegt wurde. Der Wert von $\left(\frac{dE}{dT}\right)_{\text{Cu-Ko}}$ wurde durch Differentiation der Eichkurve des Kupfer-Konstantan-Thermoelements erhalten.

Die beschriebene Versuchsanordnung hat verschiedene Vorteile gegenüber früher benutzten Anordnungen¹⁾. Es ist möglich, mit kleineren Temperaturdifferenzen zu arbeiten. Dorfman benutzte Temperaturdifferenzen bis 8° , Grew bis 5° , Foster etwa 1° und

1) J. Dorfman u. R. Janus, Ztschr. f. Phys. 54. S. 277. 1929; K. E. Grew, Phys. Rev. 41. S. 356. 1932; A. W. Foster, Phil. Mag. 18. S. 470. 1934.

wir nur $0,5-0,2^\circ$. Wegen der Zunahme von $\left(\frac{dE}{dT}\right)_{\text{Cu-Ko}}$ mit wachsender Temperatur und damit der Ausschläge für gleiche Temperaturdifferenzen war es möglich, ΔT für höhere Temperaturen durch Schwächung der Strahlung kleiner zu machen: sie wurden von $0,5^\circ$ bei Zimmertemperatur auf $0,2^\circ$ bei den höchsten Temperaturen verringert. Dadurch ist eine differentielle Messung auch an Stellen starker Krümmung der dE/dT -Kurve möglich. Die Temperaturdifferenz stellte sich in 1—2 Min. konstant ein. In der gleichen Zeit kühlte sich die Lötstelle nach der Bestrahlung auch wieder ab. Die beiden Differentialthermoelemente wurden abwechselnd an das Galvanometer gelegt. Nach jeder Ausschlagsmessung wurde die Bestrahlung unterbrochen und der Nullpunkt kontrolliert. Es war möglich, bei jeder Temperatur diese Messungen mehrmals vorzunehmen, ohne daß sich die Ofentemperatur wesentlich änderte. Die einzelnen Ausschläge unterschieden sich um weniger als 1% .

b) Die Messung von T

Die Temperaturmessung erfolgte mit dem Kupfer-Konstantan-Thermoelement, das am Auffänger festgelötet war; denn seine mittlere Temperatur $T \pm \frac{\Delta T}{2}$ im Intervall ΔT gehört zu dem gemessenen $\Delta E/\Delta T$ -Wert. Wegen des kleinen ΔT kann man $\Delta T/2$ unberücksichtigt lassen. Die Spannung des Thermoelements wurde durch Kompensation gemessen. Die Eichung erfolgte bei den Siedepunkten von Wasser, Naphthalin, Benzophenon und Schwefel. Auffänger und Nickeldraht blieben dabei an der Lötstelle, so daß sie sich im gleichen Zustand wie bei der Messung befand. Mit Hilfe der Fixpunkte wurde eine Gleichung dritten Grades $f(t)$ für E aufgestellt. Die absolute Genauigkeit der Temperaturmessung betrug 1° .

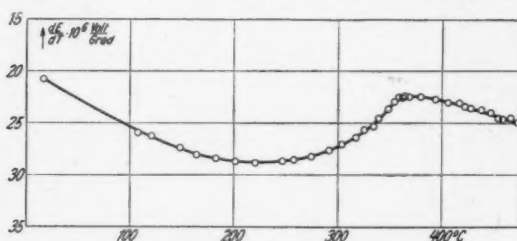
Ergebnis

In der Tab. 1 und in Abb. 3 sind die dE/dT -Werte in Temperaturabhängigkeit aufgetragen.

Die ferromagnetische Anomalie zeigt sich sehr ausgeprägt. Nach einer starken Abnahme bei Temperaturen zwischen 0° und 200°C steigt die Thermokraft von 250°C ab immer stärker an. Das Maximum der Steigung liegt bei 354°C . Man kann nicht in Analogie zur Definition des Curiepunktes bei der Widerstandstemperturkurve (Temperatur des Maximums des Temperaturkoeffizienten) diese Temperatur als Curietemperatur bezeichnen, weil der Verlauf der Kurve für dE/dT vom Bezugsmetall abhängt. Es wird jedoch später gezeigt, daß der Unterschied zwischen Curie-

Tabelle 1

$t^{\circ}\text{C}$	$-\frac{dE}{dT} \cdot 10^6 \frac{\text{Volt}}{\text{Grad}}$	$t^{\circ}\text{C}$	$-\frac{dE}{dT} \cdot 10^6 \frac{\text{Volt}}{\text{Grad}}$	$t^{\circ}\text{C}$	$-\frac{dE}{dT} \cdot 10^6 \frac{\text{Volt}}{\text{Grad}}$
17,2	20,70	317,2	26,41	379,8	22,50
108,0	25,92	325,8	25,73	384,1	22,56
121,0	26,25	334,0	25,31	393,8	22,72
148,3	27,40	339,7	24,63	403,0	23,10
164,3	28,04	348,8	23,67	405,8	23,06
183,0	28,41	354,8	22,96	416,7	23,15
202,0	28,70	358,8	22,57	421,8	23,46
221,0	28,82	362,0	22,50	427,3	23,65
246,9	28,68	363,6	22,49	437,5	23,80
257,6	28,56	364,1	22,40	446,6	24,08
274,5	28,27	368,5	22,47	453,8	24,50
291,7	27,68	370,1	22,36	458,0	24,63
304,8	27,06	375,0	22,50	464,9	24,60
				472,1	25,01

Abb. 3. Meßkurve von $\left(\frac{dE}{dT}\right)_{\text{Ni-Cu}}$

punkt und der Temperatur bei der die dE/dT -Kurve ihre maximale Steigung hat, sehr gering sein muß. Im weiteren Verlauf nimmt dE/dT nur noch schwach zu bis 370°C . Erst von 400° — 470°C fällt die Kurve innerhalb der Meßgenauigkeit linear ab. Auch hier zeigt sich also ein Übergangsgebiet oberhalb des Curiepunktes von 40° — 50°C , wie bei den Messungen des elektrischen Widerstands und der spezifischen Wärme. Es ist nicht möglich, dies auf die Versuchsbedingungen zurückzuführen. Die Temperaturdifferenzen von $0,3^{\circ}$ sind zu klein, als daß die Umgebung des Curiepunktes nicht genau genug ausgemessen werden könnte. Ein Fehler infolge einer Temperaturdifferenz zwischen der Probe und der Lötstelle des Thermoelements für die T -Messung, wie er bei anderen Messungen auftreten kann, ist hier unmöglich, da die Lötstelle des Thermoelements für die Temperaturmessung und für die Thermokraftmessung zusammenfallen.

Diskussion

Aus der thermodynamischen Theorie der thermoelektrischen Effekte ergibt sich die Beziehung¹⁾:

$$(1) \quad T \frac{d^2 E}{dT^2} = s_{Ni} - s_{Cu} \left| \frac{\text{Cal}}{\text{Coul} \cdot \text{Grad}} \right| \quad \text{oder} \quad \left| \frac{\text{Volt}}{\text{Grad}} \right|.$$

s ist der Thomsonkoeffizient des betreffenden Metalls. Er gibt die Wärmemenge an, die von der Stromeinheit beim Durchfließen des Temperaturgradienten 1 in der Zeiteinheit abgegeben oder absorbiert wird. Sein Vorzeichen ist negativ, wenn bei Elektronenbewegung in Richtung abnehmender Temperatur Wärmeabgabe erfolgt. Der einfachen Vorstellung, daß die Elektronen, von der wärmeren Seite kommend, Wärmeenergie mitbringen und als Thomsonwärme abgeben, steht die Tatsache entgegen, daß das Vorzeichen des Thomsonkoeffizienten für die verschiedenen Metalle nicht gleich ist. Die Gründe hierfür sind im einzelnen nicht bekannt²⁾. Auch ist der Zusammenhang der „spezifischen Wärme der Elektrizität“ mit der spezifischen Wärme des Elektronengases nicht aufgeklärt. Eine Gleichsetzung der beiden ist nicht erlaubt³⁾.

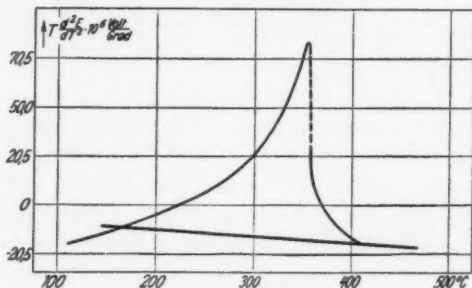


Abb. 4. $T \frac{d^2 E}{dT^2}_{Ni-Cu}$

In Abb. 4 ist $T \frac{d^2 E}{dT^2}$ in Abhängigkeit von der Temperatur dargestellt. $d^2 E/dT^2$ wurde aus der Meßkurve von dE/dT durch Differentiation mit dem Tangentenspiegel gewonnen. Die Kurve steigt bei tieferen Temperaturen zunächst langsam, dann von 300°C ab sehr rasch an. Die ursprünglich negative Differenz der Thomsonkoeffizienten nimmt absolut genommen ab und wird bald positiv.

1) Handbuch der Physik XIII, S. 192.

2) Müller-Pouillet IV, 11. Auflage, S. 225 und Hdb. d. Phys. XXIV/2, S. 359 u. 574.

3) J. Dorfman u. R. Janus, a. a. O., S. 280.

Nach Überschreiten des Maximums bei 354°C fällt sie stark ab und geht bei 400° in eine schwach nach abwärts geneigte Gerade über. Einen solchen geradlinigen Verlauf für die Differenz der Thomsonkoeffizienten zeigen viele Thermoelementkombinationen, namentlich bei höheren Temperaturen. Wir nehmen daher diesen Verlauf als „normal“ und schreiben den starken Anstieg unter 400°C mit fallender Temperatur dem auftretenden Ferromagnetismus des Nickels zu. Die Abweichung $\delta\left(T \cdot \frac{d^2 E}{dT^2}\right)$ vom „normalen“ Verlauf — als solcher kann bis etwa 300°C die extrapolierte Gerade gelten — ist in ihrer Temperaturabhängigkeit ähnlich der beim Temperaturkoeffizienten des elektrischen Widerstands und bei der spezifischen Wärme beobachteten. Da in diesen Fällen die Abweichung proportional der Änderung der inneren magnetischen Energie mit der Temperatur ist, ist es naheliegend, einen ähnlichen Zusammenhang für $\delta\left(T \frac{d^2 E}{dT^2}\right)$ zu vermuten und den Ansatz zu versuchen:

$$(2) \quad \delta\left(T \frac{d^2 E}{dT^2}\right) = a \cdot \left(-\frac{n}{2} \frac{d\sigma^2}{dT}\right).$$

n ist die Weißsche Konstante des inneren Feldes, σ die spontane Magnetisierung. Der Ausdruck $\left(-\frac{n}{2} \frac{d\sigma^2}{dT}\right)$ ergibt sich als Änderung der spontanen Magnetisierungsenergie mit der Temperatur. Sein Vorzeichen ist positiv, wegen der Abnahme von σ^2 mit wachsender Temperatur.

Nach (2) fällt das Maximum der Steigung der dE/dT -Kurve und der Curiepunkt nahe zusammen: Definiert man den Curiepunkt als Stelle des Maximums von $d\sigma^2/dT$, so liegt er nach (2) an der Stelle des Maximums von $\delta\left(T \frac{d^2 E}{dT^2}\right)$, die aber praktisch wegen der steilen Spitze mit dem Maximum von $T \frac{d^2 E}{dT^2}$ und auch mit dem von $d^2 E/dT^2$ zusammenfällt. Aus der Widerstandstemperaturkurve ergab sich als Curiepunkt $353,8^{\circ}\text{C}$ ¹⁾, was gut mit der Temperatur des Maximums von $d^2 E/dT^2$ übereinstimmt.

Der Proportionalitätsfaktor a in (2) hat die Dimension einer reziproken Ladung. Will man hieraus $\left(\frac{dE}{dT}\right)'$ berechnen, wie es sich ohne den ferromagnetischen Einfluß ergäbe, so kann man die einfachste Annahme über die Abhängigkeit von $\left(\frac{dE}{dT}\right)'$ von der Temperatur — die Darstellbarkeit durch eine Gerade — nicht machen.

1) W. Gerlach, H. Bittel u. S. Velayos, a. a. O. S. 113.

Zwar liegen die Meßpunkte oberhalb 400°C innerhalb der Meßgenauigkeit auf einer Geraden; doch ist die beobachtete dE/dT -Kurve (Abb. 3) auch bei den tiefen Meßtemperaturen noch nach oben gekrümmt, während die spontane Magnetisierungsenergie von 150° bis 50°C nur um 16% zunimmt. dE/dT von Nickel gegen Kupfer wäre also auch ohne den Einfluß des Ferromagnetismus durch eine mit fallender Temperatur stärker als linear ansteigenden Kurve gegeben. Diese Abhängigkeit werde dargestellt durch die Gleichung:

$$(3) \quad \frac{dE}{dT} = f(T); \quad T \frac{d^2 E}{dT^2} = T \frac{df(T)}{dT}.$$

Hierzu tritt im Bereich des Ferromagnetismus des Nickels noch der Ausdruck aus (2) hinzu:

$$(4) \quad T \frac{d^2 E}{dT^2} = T \frac{df(T)}{dT} - C \frac{d\sigma^2}{dT} \quad \left(C = \frac{a \cdot n}{2}\right).$$

dE/dT ergibt sich durch Integration:

$$(5) \quad \frac{dE}{dT} = f(T) - C \int \frac{1}{T} \frac{d\sigma^2}{dT} dT.$$

Wegen:

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{\sigma^2}{T} \right) = \frac{1}{T} \frac{d\sigma^2}{dT} - \frac{\sigma^2}{T^2}$$

ist:

$$(6) \quad \frac{dE}{dT} = f(T) - C \left(\frac{\sigma^2}{T} + \int \frac{\sigma^2}{T^2} dT \right).$$

Das Integral $\int \frac{\sigma^2}{T^2} dT$ läßt sich nur durch numerische Integration¹⁾ auswerten, da σ^2 nicht analytisch als Funktion von T bekannt ist.

Das Integral $\int_{\Theta}^T \frac{\sigma^2}{T^2} dT$ ist für alle Temperaturen unter Θ negativ.

Addiert man zu den gemessenen Werten dE/dT den Betrag:

$$C \left(\frac{\sigma^2}{T} + \int_{\Theta}^T \frac{\sigma^2}{T^2} dT \right)$$

so erhält man die $\left(\frac{dE}{dT} \right)'$ -Werte des nicht ferromagnetischen Nickels (Abb. 5). Die Konstante C wurde so gewählt, daß der $\left(\frac{dE}{dT} \right)'$ -Wert bei 330°C auf die aus dem Verlauf oberhalb des Curiepunktes bis 330°C extrapolierte Gerade fiel. Sie hat dann den Wert $3,9 \cdot 10^{-6}$ (vgl. S. 738). Die σ^2 -Werte stammen von früheren Messungen an

1) Wählt man als untere Grenze die Curietemperatur Θ , bei der $\sigma^2 = 0$ ist, so ist die Integrationskonstante Null.

Carbonylnickel im hiesigen Institut. In der Nähe des Curiepunktes lassen sich σ -Werte aus magnetischen Messungen nur ungenau bestimmen, wegen der auftretenden wahren Magnetisierung. Über 330° C wurden daher die σ -Werte benutzt, die sich aus der

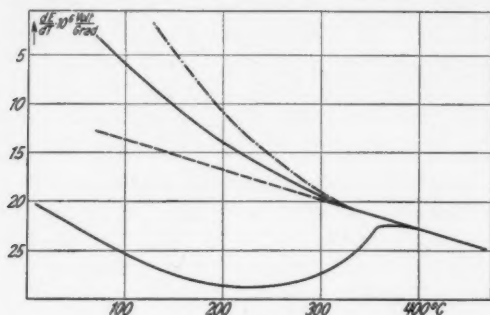


Abb. 5.

Ausgezogen: $\frac{dE}{dT}$ (untere Curie) und $\left(\frac{dE}{dT}\right)$ (obere Curie);

Strichpunktirt: $\left(\frac{dE}{dT}\right)''$; punktiert: lineare Extrapolation

Anomalie des elektrischen Widerstands ergeben. Die Kurve für $\left(\frac{dE}{dT}\right)''$ in Abb. 5 ist ohne Berücksichtigung des Integrals in (6) berechnet. Die $\left(\frac{dE}{dT}\right)'$ -Kurve weicht schon bei verhältnismäßig hohen

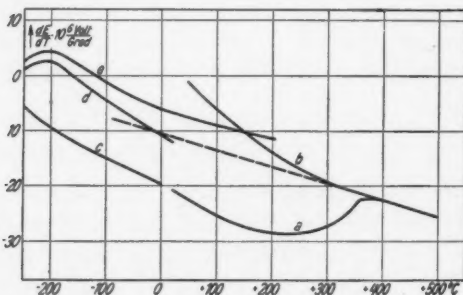


Abb. 6.

- a) $\left(\frac{dE}{dT}\right)_{\text{Ni-Cu}}$ von 20–500° C; d) $\left(\frac{dE}{dT}\right)_{\text{Pd-Cu}}$;
 b) $\left(\frac{dE}{dT}\right)'$; e) $\left(\frac{dE}{dT}\right)_{\text{Pt-Cu}}$
 c) $\left(\frac{dE}{dT}\right)_{\text{Ni-Cu}}$ von -250–0° C;

Temperaturen von der Geraden ab, was nach dem oben Gesagten zu erwarten ist. Zum Vergleich mit $\left(\frac{dE}{dT}\right)'$ sind in Abb. 6 die differentiellen Thermokräfte der verwandten nicht ferromagnetischen Metalle Palladium und Platin gegen Kupfer nach Messungen von Borelius, Keesom, Johannson und Linde¹⁾ aufgetragen und außerdem die dE/dT -Kurve von Nickel gegen Kupfer nach Messungen von Wietzel²⁾ bei Temperaturen unter 0° bis -260° C, die sich gut an die oberhalb 0° C gemessene Kurve anschließt. Der Verlauf von $\left(\frac{dE}{dT}\right)'$ sollte ähnlich dem der Palladium- und Platinkurve sein, die beide das gleiche Verhalten zeigen: Der Anstieg mit fallender Temperatur und der Vorzeichenwechsel stimmt bei den drei Kurven überein.

Wie weit — zu tieferen Temperaturen — die Berechnung von $\left(\frac{dE}{dT}\right)'$ mit der Konstanten C den Verlauf der nicht ferromagnetischen Thermokraft wiedergibt, ist nicht ohne weiteres zu sagen. Zwischen 0° und 100° C absolut ändert sich σ^2 nur noch ungefähr 1%. In diesem Gebiet müßte demnach für alle Temperaturen der Ausdruck

$$\frac{\sigma^2}{T} + \int_0^T \frac{\sigma^2}{T^2} dT$$

ungefähr gleich groß sein. Nach der Theorie der Thermokraft ist zu erwarten, daß $\left(\frac{dE}{dT}\right)'$ am absoluten Nullpunkt verschwindet. Da nach den Messungen von Wietzel dE/dT gegen Null geht bei $T \rightarrow 0$, so muß der Unterschied von $\frac{dE}{dT}$ und $\left(\frac{dE}{dT}\right)'$ nämlich:

$$C \left(\int_0^T \frac{\sigma^2}{T^2} dT + \frac{\sigma^2}{T} \right)$$

Null werden, d. h. $C \rightarrow 0$ für $T \rightarrow 0$. Wird C mit abnehmender Temperatur kleiner bis zu Null am absoluten Nullpunkt, so ergibt sich für $\left(\frac{dE}{dT}\right)'$ qualitativ der gleiche Verlauf, wie für Palladium und Platin. Setzt man dabei voraus, daß C erst von etwa 0° C an merklich kleiner wird, — entsprechend dem Verhalten der Größe b bei deren Widerstand — so erhält man insbesondere auch das charakteristische Maximum bei tiefen Temperaturen.

1) G. Borelius, W. H. Keesom, C. H. Johannson u. J. O. Linde, Proc. Amsterdam 33. S. 17 u. 32. 1930, nach Landolt-Börnstein.

2) G. Wietzel, Ann. d. Phys. 43. S. 605. 1914.

Die Annahme dieser Temperaturabhängigkeit für C wird gestützt durch die Verhältnisse bei der ferromagnetischen Anomalie des elektrischen Widerstands¹⁾. Zwischen 0° und 100°C hört die Proportionalität $\delta R \sim b \sigma^2$ zwischen der magnetischen Widerstands-anomalie δR und dem Quadrat der spontanen Magnetisierung mit konstantem b auf. b wird temperaturabhängig und fällt in erster Näherung linear zu Null am absoluten Nullpunkt ab.

Die Konstante C kann man²⁾ unter bestimmten Annahmen berechnen. Der Thomsonkoeffizient gibt die Wärmemenge an, die pro Coulomb und Grad erzeugt wird.

Der Betrag der ferromagnetischen Anomalie des Thomsonkoeffizienten

$$(7) \quad \delta(s_{N1}) = \delta(s_{N1} - s_{Ca}) = \delta \left(T \frac{d^2 E}{dT^2} \right)$$

soll die Energie sein, welche pro Gramm und Grad die innere magnetische Energie zerstört (also z. B. die Kopplung der Elektronen aufhebt. Ist Z die Zahl der Ni-Atome pro Gramm, αZ entsprechend die Zahl der für den Ferromagnetismus in Betracht kommenden Elektronen, e die Elementarladung, so folgt für den Proportionalitätsfaktor α [Gl. (2)], der die Dimension einer reziproken Ladung hat,

$$\alpha = \frac{1}{\alpha Z e},$$

und für C berechnet sich:

$$C = 10^{-7} \frac{n}{2 \alpha e Z} = 10^{-7} \frac{n M}{2 \alpha e L}$$

$\left(T \frac{d^2 E}{dT^2} \right)$ in Volt/Grad und $\frac{n}{2} \frac{d \sigma^2}{dT}$ in Erg/Grad \cdot gr), M Atom-Gew. von Nickel = 58,7, $L = 6,06 \cdot 10^{23}$, $e = 1,59 \cdot 10^{-19}$ Coulomb.

Rechnet man mit der oberhalb des Curiepunktes bestimmten Konstanten des inneren Feldes $n = 1,24 \cdot 10^5$ und $\alpha = 1$, so erhält man: $C = 3,8 \cdot 10^{-6}$. Dies ist in guter Übereinstimmung mit dem zur Berechnung von $\left(\frac{dE}{dT} \right)'$ benutzten Wert: $C = 3,9 \cdot 10^{-6}$.

Nach der Theorie³⁾ sollte jedoch $\alpha = 0,6$ sein. Andererseits ist die Konstante des inneren Feldes nach Potter⁴⁾ im ferromagnetischen Gebiet nahezu halb so groß wie im paramagnetischen.

1) W. Gerlach, H. Bittel u. S. Velayos, a. a. O.

2) Wenn man von ihrer Temperaturabhängigkeit bei tiefen Temperaturen absieht.

3) N. F. Mott, Proc. Phys. Soc. **47**. S. 582. 1935.

4) H. H. Potter, Proc. Roy. Soc. **146**. S. 362. 1934.

Somit ergibt sich mit diesem ferromagnetischen n und $\alpha = 0,6$ angenähert der gleiche Wert wie mit $\alpha = 1$ und der paramagnetischen Konstanten n .

Nach dieser Anschauung ist es auch klar, warum der Ferromagnetismus eine Abnahme des Thomsonkoeffizienten und eine Zunahme der spezifischen Wärme hervorruft¹⁾. Die *spezifische Wärme* ist im ferromagnetischen Gebiet *erhöht*, weil sie nicht nur die molekulare Wärmeenergie liefert, sondern auch die spontane Magnetisierung aufheben muß. Die *Thomsonwärme* wird *geringer*, weil ein Teil von ihr zur Zerstörung der inneren Magnetisierungsenergie verwendet wird²⁾.

Unbefriedigend an der Deutung der ferromagnetischen Anomalie des Thomsonkoeffizienten von Nickel ist die Tatsache, daß er nicht durchweg negativ ist, sondern unterhalb und oberhalb des Curiepunktes sein Vorzeichen ändert. Dies geht aus Abb. 4 hervor, welche die Differenz ($s_{Ni} - s_{Cu}$) darstellt. Bei 100° C ist

$$s_{Cu} = 2,16 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Volt}}{\text{Grad}}^3)$$

und nimmt mit wachsender Temperatur etwas zu. Also ist bei den tiefsten und höchsten Temperaturen des Meßbereichs $s_{Ni} < 0$, dazwischen > 0 . Eine Aufklärung dieses Befundes ist zu erwarten, wenn allgemein über das Vorzeichen des Thomsonkoeffizienten mehr bekannt ist.

Vergleichung mit anderen Messungen

In Abb. 7 sind die bisherigen Messungen der Thermokraft zusammengestellt, und zwar ist $T \frac{d^2 E}{dT^2}$ aufgetragen, da man dann auch die Messungen von Nickel gegen Platin von Grew und von Dorfman zum Vergleich heranziehen kann. Nach Gl. (2) sollte sich nämlich für jede Kombination der gleiche Wert für die ferromagnetische Abweichung $\delta \left(T \frac{d^2 E}{dT^2} \right)$ ergeben. Es wurde daher von

1) E. C. Stoner, Phil. Mag. 12. S. 737. 1931.

2) Abgesehen davon, daß man von vorneherein die spezifische Wärme der Elektronen und die Thomsonwärme nicht als identisch annehmen darf, ist bei Dorfman (Dorfman u. Janus, a. a. O., S. 288 und K. E. Grew, a. a. O., S. 356) auch ein Vorzeichen falsch. Er erklärt die Zunahme der spezifischen Wärme von Nickel infolge des Ferromagnetismus als Folge der Zunahme der spezifischen Wärme der Elektronen, die mit der Thomsonwärme identisch sein soll, während tatsächlich die Thomsonwärme abnimmt.

3) G. Borelius u. F. Gunneson, Ann. d. Phys. 65. S. 520. 1921.

der in Abb. 4 extrapolierten Geraden aus $\delta \left(T \frac{d^2 E}{dT^2} \right)$ aufgetragen, wie es sich aus diesen Messungen ergibt. Dann sollten alle Messungen die gleiche Kurve für $T \frac{d^2 E}{dT^2}$ liefern, wenigstens so lange die geradlinige Extrapolation erlaubt ist, also bis $\sim 310^\circ \text{C}$ (vgl. Abb. 5). Bei Grew liegt die Curietemperatur höher, was die Verschiebung nach rechts zum großen Teil erklärt. Am wenigsten

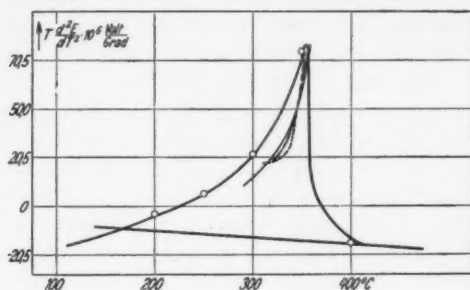


Abb. 7.

Ausgezogen: $T \frac{d^2 E}{dT^2}$ aus eigener Messung (vgl. Abb. 4) und von Grew

— — — — — } Dorfman
 - - - - - }
 - o - o - o - } Foster

stimmen die Kurven für zwei verschiedene Nickelsorten von Dorfman unter sich und mit den übrigen überein. Dagegen fallen die Messungen von Foster, in denen ebenfalls Kupfer als Bezugsmetall dient, fast völlig mit unserer Kurve zusammen.

Teil II:

Die wahre Wärmeleitfähigkeit von Nickel in Temperaturabhängigkeit

Die Messungen der mittleren Wärmeleitfähigkeit von Nickel von K. Honda und T. Simidu¹⁾, F. H. Schofield²⁾ und van Dusen und S. M. Shelton³⁾ ergeben eine Zunahme der Wärmewiderstände mit wachsender Temperatur bis etwa 400°C , bei höheren Temperaturen eine allmähliche Abnahme. Man hat diesen Verlauf mit dem Ferromagnetismus des Nickels in Zusammenhang gebracht⁴⁾.

1) K. Honda u. T. Simidu, Sci. Rep. Tohoku Imp. Univ. **6**. S. 219. 1917.

2) F. H. Schofield, Proc. Roy. Soc. **107**. S. 206. 1925.

3) M. van Dusen u. S. M. Shelton, Bureau of Stand. Journal of Res. **12**. S. 429. 1934.

4) Vgl. z. B. Handb. d. Metallphysik. Leipzig 1935, S. 373.

Demnach wäre die Wärmeleitfähigkeit, wie die elektrische Leitfähigkeit, im Bereich der spontanen Magnetisierung anomal groß und erreichte ein Minimum am Curiepunkt. Die bei hohen Temperaturen beobachtete Zunahme von λ ähnelt der z. B. bei Platin gefundenen¹⁾. Genauer lässt sich über den Verlauf der (λ, T) -Kurve bisher nicht aussagen, da nur mittlere Wärmeleitzahlen in Temperaturintervallen von 30—100° gemessen wurden. Es wurde daher eine *differentielle* Methode ausgearbeitet, welche bei einem Temperaturgefälle von einigen Zehntelgrad die *wahre Wärmeleitfähigkeit* in Abhängigkeit von der Temperatur liefert.

Methode

An dem einen Ende des Probestabes wird durch elektrische Heizung Wärmeenergie zugeführt, während das andere Ende auf konstanter Temperatur gehalten wird. Ist durch genügende Wärmeisolation dafür gesorgt, daß durch jeden Querschnitt der Probe die nämliche Energie fließt, so gilt:

$$Q = \lambda \cdot q \cdot \frac{dT}{dx}.$$

Q ist die pro Zeiteinheit in die Probe geschickte Wärme, q der Probenquerschnitt, dT/dx das als Temperaturdifferenz zweier Querschnitte vom Abstand Δx gemessene Temperaturgefälle. Die hieraus bestimmte Wärmeleitfähigkeit gilt für die mittlere Temperatur $\frac{T_1 + T_2}{2}$, wobei T_1 die Temperatur an einen, T_2 am anderen Querschnitt ist.

Die Bedingung genügender Wärmeisolation ist wegen der bei höheren Temperaturen zunehmenden Strahlung schwer zu erfüllen. Nach dem Stefan-Boltzmannschen Gesetz gilt für den Strahlungsverlust pro Quadratcentimeter und Sekunde für den schwarzen Körper:

$$(2) \quad \delta S = \sigma T^3 \delta T.$$

Bei gleichbleibender kleiner Temperaturdifferenz gegen die Umgebung kann der Wärmestrom durch Querschnittsvergrößerung der Probe erhöht werden, so daß δS trotz des Anwachsens mit T^3 klein gegen diesen bleibt, da die strahlende Oberfläche nur mit r , der Querschnitt mit r^2 zunimmt. Jedoch kann dies nicht beliebig weit fortgesetzt werden, da die Wärmekapazität des Reservoirs beschränkt

¹⁾ R. Holm u. R. Störmer, Wiss. Veröff. a. d. Siemenskonzern 9. S.312. 1930.

ist, das den Wärmestrom am Ende des Stabes aufnehmen und für konstante Endtemperatur sorgen soll. Die Probe soll also kurz und dick sein, damit der Strahlungsverlust gering, der Wärmestrom groß ist. Der Temperaturgradient soll außerdem klein sein. Er wurde mit zwei Differentialthermoelementen gemessen. Bei jedem ist das eine Metall die Nickelprobe selbst, das andere Kupfer bzw. Konstantan; aus der Kombination beider erhält man ΔT , wie bei der Thermokraftmessung in Teil I; gleichzeitig erhält man wie dort $\Delta E/\Delta T$ der Nickelprobe gegen Kupfer aus den beiden Thermospannungen $\Delta E_{\text{Ni-Cu}}$ und $\Delta E_{\text{Ni-Ko}}$. Der Temperaturgradient betrug 0,5 bis 0,7° C/cm.

Versuchsanordnung

Ein Nickelstäbchen von 3 cm Länge und 0,4 cm Durchmesser wurde in einen zylindrischen 3 cm langen und 2 cm dicken Kupferklotz 4 mm tief eingeschraubt (Abb. 8). In 0,2 cm Abstand vom

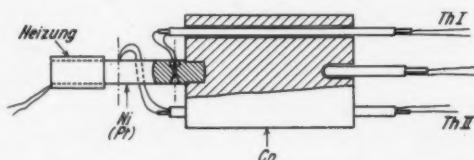


Abb. 8. Anordnung zur Wärmeleitungsmessung

Gewinde war in der Achse des Stäbchens ein Kupfer- und Konstantandraht (je 0,07 mm Durchmesser) hart angelötet. Eine zweite derartige Lötstelle befand sich im Abstand 1 cm von der ersten entfernt. In 1 mm Abstand vor der vorderen Lötstelle begann eine Heizwicklung, die durch eine dünne Schicht von Kaolin mit Wasserglas isoliert unmittelbar auf die Probe gewickelt war. Die zugeführte Leistung ($\sim 0,1$ Watt) war für alle Meßpunkte dieselbe. Die Anordnung war wie bei der Thermokraftmessung (Teil I) in einem auf $2 \cdot 10^{-3}$ mm Hg ausgepumpten Glasrohr untergebracht, das von einem bifilar gewickelten Widerstandsofen von 50 cm Länge umgeben war. Zur Temperaturmessung war in den Kupferzylinder ein Kupferkonstantanthermoelement eingeführt. Wesentlich war die Konstanz der Ofentemperatur über längere Zeit ($\frac{1}{2}$ Std.).

Vergleichsmessungen wurden an einer Platinprobe¹⁾ vor-

1) Für ihre Herstellung und kostenlose Überlassung danken wir Herrn Dr. W. H. Heraeus.

genommen, welche die gleichen Dimensionen hatte wie das Nickelstäbchen. Beide wurden berußt, um gleiche Strahlungsverhältnisse zu haben.

Ergebnis

In Abb. 9, Kurve I ist die Temperaturdifferenz ΔT der beiden Lötstellen, die dem Wärmewiderstand proportional ist, in Temperaturabhängigkeit aufgetragen. Kurve II stellt den Verlauf der gleichzeitig erhaltenen differentiellen Thermokraft der Nickelprobe gegen Kupfer dar. Die Meßwerte wurden sowohl in der Reihenfolge

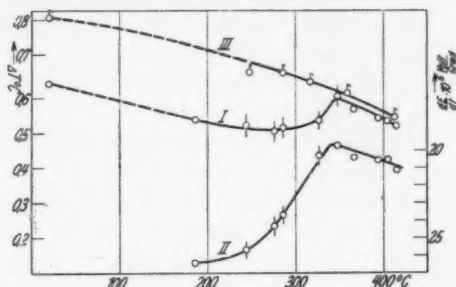


Abb. 9.

Kurve I: $(\Delta T)_{\text{Nickel}}$; Kurve II: $(dE/dT)_{\text{Ni-Cu}}$; Kurve III: $(\Delta T)_{\text{Platin}}$.
Linker Ordinatenmaßstab für ΔT ; rechter Ordinatenmaßstab für dE/dT

steigender als auch fallender Temperatur erhalten. Die Schwankungen der Einzelmessungen liegen für die verschiedenen Meßpunkte zwischen ± 3 und 6% . Kurve III enthält die Messung an Platin. Während die Kurven I und II bei 345°C ein Maximum haben, verläuft Kurve III an dieser Stelle glatt. Wesentlich ist das Zusammenfallen der beiden Maxima in I $\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ und II $\left(\frac{\Delta E}{\Delta T}\right)$, woraus hervorgeht, daß die Zunahme des Wärmewiderstands bei der gleichen Temperatur erfolgt, bei der die anderen physikalischen Eigenschaften von Nickel eine Anomalie aufweisen. Der starke Abfall der Nickel- und Platinkurve oberhalb des Curiepunktes ist zum Teil auf eine wirkliche Abnahme des Wärmewiderstands zurückzuführen¹⁾, über die sich aber noch die Zunahme des Strahlungsverlustes überlagert. Letzterer ist wohl auch der Grund für die Abnahme des ΔT bei Platin mit wachsender Temperatur zwischen Zimmertemperatur und 280°C . Frühere Messungen¹⁾ ergaben in diesem Gebiet einen schwachen Anstieg.

1) Vgl. Fußnote, S. 741.

Eine einfache Beziehung zwischen σ^2 und der Anomalie des Wärmewiderstands kann nicht aufgestellt werden. Insonderheit ändert sich der Wärmewiderstand am Curiepunkt stärker als r/T des elektrischen Widerstands.

Zusammenfassung

1. Die differentielle Thermokraft dE/dT von Nickel gegen Kupfer wurde in Abhängigkeit von der Temperatur zwischen Raumtemperatur und 470°C nach einer Differentialmethode gemessen und die ferromagnetische Anomalie diskutiert.

2. Die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit von Nickel wurde mit einer Differentialmethode zwischen Raumtemperatur und 420° bestimmt. Es ergab sich eine anomale Abnahme von λ in der Nähe des Curiepunkts.

Die Arbeit wurde am Physikalischen Institut der Universität München durchgeführt. Herrn Prof. Dr. W. Gerlach danke ich für die Anregung zur Arbeit und ihre dauernde Förderung. Ferner danke ich Herrn Dr. H. Bittel für viele wertvolle Ratschläge.

München, Physikalisches Institut der Universität, August 1937.

(Eingegangen 5. September 1937)

Berichtigung

zu: Georg Bauer: „Elektrisches und optisches Verhalten von Halbleitern. XIII. Messungen an Cd-, Tl- und Sn-Oxyden“ (Ann. d. Phys. [5] **30**, S. 433—445. 1937). Die 2. Formel auf S. 434 lautet richtig:

$$\sigma = \frac{2cA_0}{x} \left(\sqrt{\frac{1}{D}} - 1 \right).$$

S. 437, letzter Absatz und S. 438, dritter Absatz sind die Zahlenangaben der spezifischen Leitfähigkeit mit 10^4 zu multiplizieren. Die spezifische Leitfähigkeit der Cadmiumoxydschichten ist somit $200\text{ Ohm}^{-1}\text{cm}^{-1}$ (Werte zwischen 100 und $300\text{ Ohm}^{-1}\text{cm}^{-1}$) und auch die Preßpastillen haben eine Leitfähigkeit von $10^4\text{ Ohm}^{-1}\text{cm}^{-1}$. — Leider war bei der Übertragung der Meßergebnisse in das Manuskript mit einem Faktor 10^3 dividiert, statt multipliziert worden. —

Ebenso ist auf S. 438, Zeile 7 von unten, das Wort „nicht“ zu streichen.

Ferner sind auf S. 441, vorletzter Absatz, die Worte „das Verhalten gegen Sauerstoff“ zu streichen, da sie versehentlich in den Text geraten sind.

(Eingegangen 16. November 1937)

Über die Messung der optischen Konstanten sehr dünner Metallschichten

Von K. Försterling

(Mit 1 Abbildung)

Die Bestimmung der optischen Konstanten und der Dicke einer sehr dünnen Metallschicht ist dadurch sehr erschwert, daß diese Größen in sehr komplizierter Weise mit den direkt beobachtbaren Größen (Polarisationszuständen oder Intensitäten) zusammenhängen. Ich habe daher versucht, durch Kombination in geeigneter Weise gewonnener Beobachtungen übersichtliche Formeln zu gewinnen, die es gestatten, ohne Vernachlässigung die optischen Konstanten und die Dicke der Schicht zu berechnen. Die praktische Brauchbarkeit der so zur Berechnung der Schichtdicke gewonnenen Formel ist kürzlich von G. Essers-Rheindorf¹⁾ erwiesen worden. Zur Berechnung der optischen Konstanten mußte bei der von mir früher vorgeschlagenen Methode²⁾ die Schicht zwischen zwei optisch gleiche Medien gebracht werden, ein Verfahren, das bei sehr dünnen Schichten unter Umständen bedenklich ist. Die im folgenden vorgeschlagene Methode vermeidet diesen Übelstand und gestattet, sämtliche Beobachtungen an der etwa auf Glas niedergeschlagenen Schicht in Luft vorzunehmen.

n_1 sei der Brechungsindex der Luft, n_3 der der als durchsichtig vorausgesetzten Unterlage der Schicht

$$n_2 = n_3 (1 - i \kappa_2) = n_3 - i k_2$$

derjenige der Metallschicht. c_1, c_2, c_3 seien die Richtungskosinus der Wellennormale gegen das Einfallslot innerhalb der entsprechenden Medien, a_1, a_2, a_3 die entsprechenden Sinus. Die Dicke der Schicht sei L . r, δ seien die Fresnelschen Schwächungskoeffizienten an der Grenze (1, 2) beim Durchgang der Welle aus dem ersten Medium ins zweite r^*, δ^* diejenigen an derselben Grenze beim Durchtritt in umgekehrter Richtung; und entsprechend seien r', δ' an der Grenze (2, 3) und r'', δ'' definiert. Es gilt dann

$$(1) \quad \begin{cases} r^* = -r, & r'' = -r', \\ \delta^* = \frac{c_2 n_1}{c_1 n_2} \delta, & \delta'' = \frac{c_3 n_2}{c_2 n_3} \delta'. \end{cases}$$

1) G. Essers-Rheindorf, Ann. d. Phys. [5] 28. S. 297. 1937.

2) K. Försterling, Gött. Nachr. 1911. S. 449.

Der Fresnelsche Schwächungskoeffizient bei der Reflexion bei Fehlen der Schicht, also beim Übergang vom Medium (1) nach (2) sei r_0 ; für ihn ergibt sich die Identität:

$$(2) \quad r_0 = \frac{r + r'}{1 + r r'},$$

wenn man die Ausdrücke für r und r' einsetzt.

Fällt die Amplitude E im ersten Medium auf die Schicht, so gilt für die durchgegangene (D)- und reflektierte (R)-Amplitude:

$$(3a) \quad D = \mathfrak{D} E, \quad R = \mathfrak{R} E.$$

Fällt das Licht vom dritten Medium her auf die Schicht, so mag entsprechend gelten

$$(3b) \quad D^* = \mathfrak{D}^* E^*, \quad R^* = \mathfrak{R}^* E^*$$

Hierbei sind D , E^* und R^* die Amplituden im dritten Medium. Da in Wirklichkeit die Beobachtung in Luft stattfindet, so sind diese Größen mit Hilfe der Fresnelschen Formeln durch die direkt gemessenen Werte, die wir mit $[D]$, $[E^*]$, $[R^*]$ bezeichnen wollen, zu berechnen.

Die angegebenen Formeln gelten sowohl für die parallel (p), als auch für die senkrecht (s) zur Einfallsebene schwingenden Komponenten der magnetischen Feldstärke, nur sind die Ausdrücke für r und r' , \mathfrak{d} und \mathfrak{d}' verschieden. Es ist:

$$(4a) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_s = \frac{n_2 c_1 - n_1 c_2}{n_2 c_1 + n_1 c_2}, \quad r'_s = \frac{n_2 c_2 - n_1 c_3}{n_2 c_2 + n_1 c_3}, \\ \mathfrak{d}_s = \frac{2 c_1 n_2}{n_2 c_1 + n_1 c_2}, \quad \mathfrak{d}'_s = \frac{2 c_2 n_2}{n_2 c_2 + n_1 c_3} \end{array} \right.$$

und entsprechend:

$$(4b) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_p = \frac{n_1 c_1 - n_2 c_2}{n_1 c_1 + n_2 c_2}, \quad r'_p = \frac{n_2 c_2 - n_3 c_3}{n_2 c_2 + n_3 c_3}, \\ \mathfrak{d}_p = \frac{2 c_1 n_2}{n_1 c_1 + n_2 c_2}, \quad \mathfrak{d}'_p = \frac{2 c_2 n_3}{n_2 c_2 + n_3 c_3}. \end{array} \right.$$

$$(4c) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{0s} = \frac{n_2 c_1 - n_1 c_3}{n_2 c_1 + n_1 c_3}, \\ r_{0p} = \frac{n_1 c_1 - n_3 c_3}{n_1 c_1 + n_3 c_3}. \end{array} \right.$$

Fällt das Licht im ersten Medium ein und ist $E_s = E_p$, so gilt im dritten Medium $\frac{D_s}{D_p} = \frac{\mathfrak{D}_s}{\mathfrak{D}_p}$. Da die Welle noch die Grenze (3, 1) zu durchsetzen hat, um zum Kompensator und Nikol zu gelangen, so wird nicht D_s/D_p direkt, sondern $[d_0^* \text{ Fresnelscher Schwächungskoeffizient (3, 1)}]$

$$\left[\frac{D_s}{D_p} \right] = \frac{d_{0s}^*}{d_{0p}^*} \frac{D_s}{D_p} = \frac{1}{\cos(\varphi - \psi)} \frac{D_s}{D_p}.$$

gemessen. (φ Winkel der Wellennormale gegen das Einfallslot in Luft, ψ im dritten Medium, also etwa in Glas.)

Also:

$$\frac{D_s}{D_p} = \cos(\varphi - \psi) \left[\frac{D_s}{D_p} \right].$$

Fällt das Licht vom dritten Medium her ein, so ist zunächst (vgl. Abb. 1)

$$\begin{aligned} \frac{E_s^*}{E_p^*} &= \left[\frac{E_s^*}{E_p^*} \right] \frac{1}{\cos(\varphi - \psi)}, \\ \frac{R_s^*}{R_p^*} &= \left[\frac{R_s^*}{R_p^*} \right] \cos(\varphi - \psi), \\ \frac{R_s^*}{R_p^*} &= \frac{R_s^*}{R_p^*} \cdot \frac{E_p^*}{E_s^*} = \cos^2(\varphi - \psi) \left[\frac{R_s^*}{R_p^*} \right] \left[\frac{E_p^*}{E_s^*} \right]. \end{aligned}$$

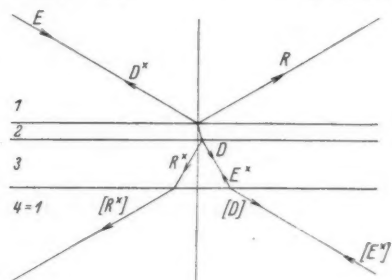


Abb. 1. Strahlengang

Aus den Beziehungen (1) ersieht man sofort, daß

$$\frac{\mathfrak{D}_s^*}{\mathfrak{D}_p^*} = \frac{\mathfrak{D}_s}{\mathfrak{D}_p}.$$

Für gewöhnlich macht man

$$\frac{E_s}{E_p} = 1 \quad \text{und} \quad \left[\frac{E_s^*}{E_p^*} \right] = 1;$$

wir wollen dies im folgenden voraussetzen.

Wir setzen nun

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\mathfrak{R}_s}{\mathfrak{R}_p} = \operatorname{tg} \chi_R e^{i\delta_R}, & \frac{\mathfrak{R}_s^*}{\mathfrak{R}_p^*} = \operatorname{tg} \chi_R^* e^{i\delta_R^*}, \\ \frac{\mathfrak{D}_s}{\mathfrak{D}_p} = \operatorname{tg} \chi_D e^{i\delta_D}. \end{cases}$$

Sind $[\chi_R]$, $[\chi_R^*]$, $[\chi_D]$ die direkt abgelesenen Azimute, so ist:

$$(6) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \chi_R = \operatorname{tg} [\chi_R], \\ \operatorname{tg} \chi_R^* = \cos^2(\varphi - \psi) \operatorname{tg} [\chi_R], \\ \operatorname{tg} \chi_D = \cos(\varphi - \psi) \operatorname{tg} [\chi_D]. \end{cases}$$

(Die Phasen erleiden beim Übergang (3,1) und (1,3) keine Änderung.)

Wir denken uns also die drei komplexen Größen

$$\frac{\mathfrak{R}_s}{\mathfrak{R}_p} = \operatorname{tg} \chi_R e^{i\delta_R},$$

$$\frac{\mathfrak{R}_s^*}{\mathfrak{R}_p^*} = \operatorname{tg} \chi_R^* e^{i\delta_R^*} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{D}_s}{\mathfrak{D}_p} = \operatorname{tg} \chi_D e^{i\delta_D}$$

durch Polarisationsmessungen gefunden.

Nun gilt sowohl für den Index (p) wie (s):

$$(7) \quad \begin{cases} \mathfrak{R} = \frac{r + r' e^{-2}}{1 + r r' e^{-2}}, & \mathfrak{D} = \frac{d d' e^{-1}}{1 + r r' e^{-2}}, \\ \mathfrak{R}^* = -\frac{r' + r e^{-2}}{1 + r r' e^{-2}}, \end{cases}$$

wobei

$$(8) \quad \begin{cases} e = e^{2\pi i n_3 c_2 \frac{L}{\lambda}} \\ (\lambda \text{ Wellenlänge in Luft}) \end{cases}$$

gesetzt ist.

Wir wollen nun annehmen, daß das erste Medium den Brechungsindex Eins hat.

Die Beobachtungen sollen nun stets so vorgenommen werden, daß das Licht bei fehlender Schicht die Grenze (1,3) unter dem Polarisationswinkel durchsetzt. (Beim Übergang von $\mathfrak{R}_s/\mathfrak{R}_p$ zu $\mathfrak{R}_s^*/\mathfrak{R}_p^*$ ist also die Richtung des Strahlenganges einfach umzukehren.) Dann gilt: $r_{0s} = 0$, also:

$$c_3 = n_3 c_1, \quad r_s = -r'_s.$$

Dann ist zunächst

$$\mathfrak{R}_s = r_s \frac{1 - e^{-2}}{1 - r_s^2 e^{-2}}, \quad \mathfrak{R}_p = r_p \frac{1 + \frac{r_p'}{r_p} e^{-2}}{1 + r_p r_p' e^{-2}},$$

$$\mathfrak{R}_s^* = -r_s \frac{-1 + e^{-2}}{1 - r_s^2 e^{-2}}, \quad \mathfrak{R}_p^* = -r_p \frac{\frac{r_p'}{r_p} + e^{-2}}{1 + r_p r_p' e^{-2}}.$$

Wir bilden nun die Größe:

$$(9) \quad \begin{cases} A = \frac{1 - \frac{\mathfrak{R}_p^*}{\mathfrak{R}_s}}{\frac{\mathfrak{R}_s^*}{\mathfrak{R}_p} + 1} = \frac{1 - \frac{\operatorname{tg} \chi_R^*}{\operatorname{tg} \chi_R} e^{i(\delta_R^* - \delta_R)}}{1 + \frac{\operatorname{tg} \chi_R^*}{\operatorname{tg} \chi_R} e^{i(\delta_R^* - \delta_R)}} \end{cases}$$

und finden:

$$(10) \quad A = \frac{r_p' + r_p}{r_p' - r_p} \frac{e^{+1} + e^{-1}}{e^{+1} - e^{-1}} = \frac{1}{i} \frac{r_p' + r_p}{r_p' - r_p} \cotg \left(2\pi n_3 c_2 \frac{L}{\lambda} \right)$$

und mit Benutzung von (4a) und (4b)

$$(11) \quad \cotg \left(2\pi n_2 c_2 \frac{L}{\lambda} \right) = -i \cdot A \cdot \frac{n_2^2 - 2a_1^2}{(n_2^2 - 1)c_1 \sqrt{n_2^2 - a_1^2}}.$$

Ferner ist:

$$(12) \quad e^{-2} = \frac{A \frac{r_p' - r_p}{r_p' + r_p} - 1}{A \frac{r_p' - r_p}{r_p' + r_p} + 1}.$$

Mit Hilfe dieser Beziehung ergibt sich der im folgenden benötigte Ausdruck:

$$\frac{1 - e^{-2}}{1 + \frac{r_p'}{r_p} e^{-2}} = \frac{2}{A - 1} \frac{r_p}{r_p' - r_p}.$$

Um die optischen Konstanten der Metallschicht zu berechnen, bilden wir den Ausdruck

$$(13) \quad B = \frac{\Re_s}{\Im_s} = \frac{b_p b_p'}{b_s b_s'} \frac{r_s}{r_p} \frac{1 - e^{-2}}{1 + \frac{r_p'}{r_p} e^{-2}} = \frac{b_p b_p'}{b_s b_s'} \frac{r_s}{r_p' - r_p} \cdot \frac{2}{A - 1}.$$

Berücksichtigt man, daß unter dem Polarisationswinkel des Glases beobachtet wird, also

$$\frac{a_1^2}{c_1^2} = n_3^2$$

ist, so findet man schließlich mit Hilfe von (4a) und (4b):

$$(A - 1) B = n_3 \frac{(n_2 c_1 - c_2)(c_2 + n_2 c_1)}{n_1^2 c_2^2 - n_3^2 c_1^2} = \frac{a_1^2}{n_3} \frac{(n_2^2 - 1)(n_2^2 - n_3^2)}{n_1^2 \{ n_2^2 - [1 + c_1^2 (n_3^2 - 1)] \}}.$$

Diese Gleichung enthält die Dicke L nicht mehr und kann zur Berechnung von n_3^2 dienen.

Setzen wir für den Augenblick

$$(14) \quad 1 + c_1^2 (n_3^2 - 1) = b \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{n_3^2} \right) \frac{2n_3^2}{n_3^2 - 1} = y,$$

so ist b eine reelle bekannte Größe, und wir können die letzte Gleichung auf die Form bringen:

$$(15) \quad \frac{2b n_3}{(n_3^2 - 1) a_1^2} (A - 1) B = y - \frac{1}{y},$$

wobei

$$a_1^2 = \frac{n_3^2}{1 + n_3^2}.$$

Die Größe:

$$(16) \quad Q = \frac{n_3^2 + 1}{n_3^2 - 1} \cdot \frac{2b}{n_3} B (A - 1)$$

ist also eine aus den Messungen bekannte komplexe Zahl. Setzen wir

$$(17) \quad Q = |Q| e^{i\theta}$$

so ist

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} |Q|^2 &= \left(\frac{2b}{n_3^2} \frac{n_3^2 - 1}{n_3^2 + 1} \right)^2 \frac{4 \left(\frac{\operatorname{tg} \chi_R}{\operatorname{tg} \chi_D} \right)^2}{1 + \left(\frac{\operatorname{tg} \chi_R}{\operatorname{tg} \chi_R^*} \right)^2 + 2 \frac{\operatorname{tg} \chi_R}{\operatorname{tg} \chi_R^*} \cos(\delta_R - \delta_R^*)} \\ + \operatorname{tg} \Theta &= - \frac{\sin(\delta_D - \delta_R) + \frac{\operatorname{tg} \chi_R}{\operatorname{tg} \chi_R^*} \sin(\delta_D - \delta_R^*)}{\cos(\delta_D - \delta_R) + \frac{\operatorname{tg} \chi_R}{\operatorname{tg} \chi_R^*} \cos(\delta_D - \delta_R^*)} \end{aligned} \right.$$

Es bleibt also nur noch die Gleichung:

$$(19) \quad y - \frac{1}{y} = Q$$

zu lösen.

Man findet:

$$(20) \quad y = \frac{2n_3^2}{n_3^2 - 1} \left\{ \frac{1}{b} - \frac{1}{n_1^2} \right\} = \frac{Q}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{Q^2}{4}}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel ist so zu wählen, daß n_2^2 einen negativen imaginären Teil hat. Bequemer noch kommt man zum Ziel, wenn man $y = e^{iz}$ setzt; dann ist

$$Q = 2i \sin z$$

und man kann die komplexe Größe z direkt aus vorhandenen Tabellen entnehmen.

Wir können also, ohne eine Annäherung einzuführen, die optischen Konstanten der Metallschicht bestimmen; die Dicke der Schicht ist theoretisch keiner Beschränkung unterworfen.

Kennt man die optischen Konstanten, so kann man aus der Formel (11) die Dicke berechnen, wie es Essers-Rheindorf in der genannten Arbeit getan hat.

Die Dicke der Schicht hat auf die Polarisationszustände indessen nur dann merkbaren Einfluß, wenn die Zickzackreflexionen innerhalb der Schicht noch zur Geltung kommen. Für relativ dicke Schichten wird also jede auf Polarisationsmessungen beruhende Methode praktisch versagen, auch wenn die Formeln exakt sind.

Setzen wir

$$i 2 \pi c_2 n_2 \frac{L}{\lambda} = x$$

so wird für große x :

$$\frac{e^{+x} + e^{-x}}{e^{+x} - e^{-x}} = 1 + 2e^{-2x}$$

und

$$e^{-2x} = \frac{1}{2} \left(\frac{r_p' - r_p}{r_p' + r_p} A - 1 \right).$$

Die Formel (11) ist aber nur solange brauchbar, als $\frac{r_p' - r_p}{r_p' + r_p} A$ merklich von Eins verschieden ist, da sonst die in A enthaltenen Beobachtungsfehler eine zu große Rolle spielen. Wie Essers-Rheindorf gezeigt hat, erhält man für kleine x eine sehr einfache Formel:

$$A \frac{r_p' - r_p}{r_p' + r_p} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} \dots \right).$$

In erster Näherung findet man:

$$\frac{L}{\lambda} = + i \frac{1}{2\pi} \frac{1}{A} \frac{c_1(n_2^2 - 1)}{n_2^2 - 2a_1^2}.$$

Eine Kontrolle, daß die Theorie auf die Schicht anwendbar ist, findet sich darin, daß das Produkt

$$i A (n_2^2 - 2a_1^2)$$

reell sein muß. In Wirklichkeit ist diese Forderung nur ungenau erfüllt. Im folgenden gebe ich einige Beobachtungsergebnisse wieder, die Herr Odenbach, der in unserem Institut mit der Untersuchung sehr dünner Metallschichten beschäftigt ist, erhalten hat. Die Schichten waren im Hochvakuum aufgedampft.

$$\text{I. } n_2 = 0,52 \quad k_2 = 1,94 \quad \frac{L}{\lambda} = 0,028 + i 0,004,$$

$$\text{II. } n_2 = 0,64 \quad k_2 = 2,25 \quad \frac{L}{\lambda} = 0,014 + i 0,002,$$

$$\text{III. } n_2 = 0,71 \quad k_2 = 1,77 \quad \frac{L}{\lambda} = 0,017 + i 0,005.$$

Da Herr Essers-Rheindorf in ähnlicher Weise Abweichungen, die außerhalb der Beobachtungsfehler liegen, gefunden hat, so scheint die der Theorie zugrunde liegende Annahme einer homogenen isotropen Metallschicht nur angenähert erfüllt zu sein.

Köln, Institut für theoretische Physik.

(Eingegangen 16. September 1937)

**Berichtigung zu Arbeiten über die dynamische Theorie
der Röntgeninterferenzen¹⁾**

Von M. Kohler und M. v. Laue

Herr H. Ott, dem wir dafür zu Dank verpflichtet sind, macht uns brieflich auf ein falsches Vorzeichen aufmerksam, das sich in die angeführten Arbeiten eingeschlichen hat, ohne jedoch wesentliche Ergebnisse zu verfälschen. Die Anpassungsgröße δ trägt bei Kohler in beiden Gl. (10) das negative Vorzeichen. Berechnet man aber aus den Gl. (9) die Absolutwerte $|\mathfrak{E}_0|$ und $|\mathfrak{E}_m|$, so folgt (unter Vernachlässigung von Summanden mit δ^2)

$$|\mathfrak{E}_0| = k(1 + \delta\gamma_0), \quad |\mathfrak{E}_m| = k(1 + \alpha_m + \delta\gamma_m).$$

Also durch Vergleich mit den Definitionen von ε_0 und ε_m :

$$|\mathfrak{E}_0| = k(1 + \varepsilon_0), \quad |\mathfrak{E}_m| = k(1 + \varepsilon_m)$$

an Stelle von (10):

$$\varepsilon_0 = \delta\gamma_0 \quad \varepsilon_m = \alpha_m + \delta\gamma_m.$$

Infolgedessen sind in Kohlers Gl. (11) und (13) die Vorzeichen von δ umzukehren. Bei Laue, a. a. O., ist Gl. (17) mit Kohlers (Gl. 13) identisch, so daß dieselbe Vorzeichenumkehr in ihr vorzunehmen ist. Ferner muß man in Gl. (27) und der ihr vorangehenden, unnummerierten Formel r_1 und r_2 mit einander vertauschen. Und schließlich ist in Formel (30, I) das positive Vorzeichen des Summanden mit V_2 in das negative umzuwandeln. Dies sind die einzigen Änderungen, die sich aus jenem Versehen ergeben.

1) M. Kohler, Ann. d. Phys. [5] 18. S. 265. 1933; M. v. Laue, ebenda 23. S. 705. 1935.

Berlin, I. Institut für theoretische Physik an der Universität, Oktober 1937.

Namenregister zum Jahrgang 1937

5. Folge, Band 28—30

A

Adenstedt, H., vgl. Grüneisen, E. 29, 597.

B

Bagge, E., Über die Berechnung der mittleren Ionisierungsenergie der Gase 30, 72.

Bauer, G., Elektrisches und optisches Verhalten von Halbleitern. XIII. Messungen an Cd-, Tl- und Sn-Oxyden 30, 433. — Berichtigung zu Bd. 30, S. 433—445 30, 744.

Bechert, K., Zum Drehimpulssatz der Wellenmechanik 28, 199.

Becker, A. u. Kipphan, E., Die Streuung mittelschneller Kathodenstrahlen in Gasen 28, 465.

Bopp, F., Zweifache Comptonstreuung 30, 35.

Borelius, G., Zur Theorie der Umwandlungen von metallischen Mischphasen. IV. Die Ausscheidung ungeordneter Mischphasen 28, 507. — Bemerkungen zu den Gesetzmäßigkeiten der metallischen Wärmeleitung 29, 251.

Brasack, F. vgl. Krüger, F. 30, 113.

Bruggemann, D. A. G., Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen.

III. Die elastischen Konstanten der quasiisotropen Mischkörper aus isotropen Substanzen 29, 160.

Busch, H., Zur Elektronenoptik der langen Magnetspule 28, 11.

C

Christoph, W., Über die Nachlieferung von Elektronen in der Coronaentladung bei niederen Drucken 30, 446.

Claesson, M. vgl. Swedenborg, H. 28, 159.

D

Debye, P. u. Ramm, W., Hochfrequenzverluste und quasikristalline Struktur von Flüssigkeiten 28, 28.

Determann, H., Über die Richtungsverteilung der Röntgenbremsstrahlung einer massiven Antikathode 30, 481.

Deutschbein, O. u. Tomaschek, R., Die Fluoreszenz Seltener Erden in Lösungen. I 29, 311.

Döpel, R., Über die Ausbeute bei der $D \rightarrow D$ -Kernreaktion 28, 87.

Dreyer, H., Entwicklung eines objektiven Kolorimeters zur Messung geringer Anfärbungen und Trübungen 30, 650.

E

- Ebbinghaus, E. vgl. Meißner, K. W. 29, 713.
- Eckardt, A., Über die Entstehung radioaktiver Elemente bei der Beschießung von Lithium und Magnesium mit Th-C'- α -Strahlen 29, 497.
- Elle, D., Über die Absorptionen von Zentimeterwellen in Flüssigkeiten und Lösungen 30, 354.
- Engl, J. u. Leventer, I. P., Über eine neue Methode zur Messung des piezoelektrischen Effekts an Kristallpulvern 29, 369.
- Essers-Rheindorf, G., Optische Untersuchungen an dünnen Silber- und Jodsilberschichten 28, 297.

F

- Faltz, G., Elektrisches und optisches Verhalten von Halbleitern. XII. Über die innere lichtelektrische Wirkung im kristallinen Kupferoxydul 30, 193.
- Felsing, H., Untersuchungen an Sperrschichtphotozellen mit weichen Röntgenstrahlen 29, 81.
- Fenner, E., Über den Einfluß der translatorischen Komponente der Erdrotation auf einen geladenen Kondensator 29, 332.
- Fischer, V., Die Gleichgewichtsisothermen und -isobaren von Zweistoffgemischen oberhalb der kritischen Punkte ihrer Bestandteile 29, 514.
- Försterling, K., Über die Messung der optischen Konstanten sehr dünner Metallschichten 30, 745.
- Franz, W., Über die Form der Comptonlinie. II. 29, 721.
- Fredlund, E., Über die Wärmeleitung in verdünnten Gasen 28, 319. — Messungen des Radiometer-

effekts bei niedrigen Drucken 30, 99.

- Frey, F., Über die Geschwindigkeitsverteilung der von Kathodenstrahlen in Gasen ausgelösten sekundären Elektronen 30, 297.
- Fünfer, E., Umwandlung von Bor durch langsame Neutronen, gemessen mit dem Proportionalzählrohr 29, 1.
- Fürth, R. u. Sitte, K., Zur Begründung der Schwarmtheorie der flüssigen Kristalle 30, 388.

G

- Ganz, E., Über das Absorptionsspektrum von flüssigem Wasser zwischen $2,5 \mu$ und $6,5 \mu$ 28, 445.
- Gerbes, W., Über die Ionisierungswirkung von Kathodenstrahlen in verschiedenen Gasen und Gasgemischen 30, 169.
- Gieleßen, J. vgl. Grüneisen, E. III. 28, 225. — IV. 29, 25.
- Gladisch, H. vgl. Senftleben, H. 30, 713.
- Gobrecht, H., Über die Absorptions- und Fluoreszenzspektren der Ionen der Seltenen Erden in festen Körpern, insbesondere im Ultrarot 28, 673.
- Gobrecht, H. u. Tomaschek, R., Über den analytischen Nachweis der Seltenen Erden durch Absorption und Fluoreszenz 29, 324.
- Goens, E., Zur Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten elastischer Wellen in Kristallen 29, 279.
- Grafenberger, H., Zur Kenntnis der Bergmannserie des Calciums 30, 267.
- Grüneisen, E., Bild mit Widmung 29, 209.
- Grüneisen, E. u. Adenstedt, H., Anisotropie der Wärmeleitung und

Thermokraft regulärer Metalle (Wolfram) im transversalen Magnetfeld bei 20° K 29, 597.

Grüneisen, E. u. Gieleßen, J. Untersuchungen an Wismutkristallen. III. Wärme- und Elektrizitätsleitung beim Übergang von transversalem zu longitudinalem Magnetfeld 28, 225. — IV. Änderung der Thermokraft beim Übergang von transversalem zu longitudinalem Magnetfeld 29, 25.

Gustafsson, G., Der Paramagnetismus der Cu-Ni-Legierungen 28, 121.

H

Hackel, W., Die Dielektrizitätskonstante und Dipolverluste von Gläsern bei Hochfrequenz 29, 63.

Hagsten, O. vgl. Johansson, C. H. 28, 520.

Hallén, E., Ladungsverteilung auf einem Zylinder zwischen zwei leitenden Ebenen verschiedenen Potentials 29, 117.

Hammer, A., Ferromagnetismus und elektrische Eigenschaften. VII. Thermokraft, Thomsonkoeffizient und Wärmeleitvermögen von Nickel 30, 728.

Hautot, A. vgl. Trillat, J. J. 30, 165.

Henninger, F. P., Widerstandsmessungen am Bor und am Siliciumcarbid 28, 245.

Hildebrand, E., Zum Dia- und Paramagnetismus in metallischen Mischkristallreihen. V. Das Verhalten von gelöstem Kobalt und Rhodium 30, 593.

Hilsch, R., Über die Diffusion und Reaktion von Wasserstoff in KBr-Kristallen 29, 407.

Hönl, H., Zur Theorie der geladenen Elementarteilchen 28, 721.

Hohls, H. W., Über Dispersion und Absorption von Lithiumfluorid und Natriumfluorid im Ultraroten 29, 433.

Hommel, F., Elektrisches und optisches Verhalten von Halbleitern. XIV. Magnetische Messungen an Kupferoxydul 30, 467.

Honrath, W., Über die Bandenfluoreszenz von sauerstoff- und von kohlenoxydhaltigen Alkalihalogenidkristallen 29, 421.

Hottenroth, G., Untersuchungen über Elektronenspiegel 30, 689.

J

Johansson, C. H., Der Energieaustausch zwischen festen Körpern durch Strahlung 28, 185.

Johansson, C. H. u. Hagsten, O., Nachweis von Hysterese zwischen Zerfall und Rückbildung einer homogenen Metallphase 28, 520.

Joos, G., Über die Natur der Hydratbindung bei den Ionen der Übergangselemente; insbesondere beim Co^{+++} -Ion 28, 54.

Justi, E., Eine Neuberechnung der spezifischen Wärme, Enthalpie und Entropie der Luft 29, 302.

K

Kaischew, R., Über die Möglichkeit der Bildung von Kriställchen in Schmelzen bei Temperaturen oberhalb des Schmelzpunktes 30, 184.

Kamm, K., Über die Zinksulfid-Kadmiumsulfid-Phosphore 30, 333.

Kern, J., Über ein verbessertes Hochfrequenzstroboskop und seine Anwendung auf Gasentladungen bei schnell wechselnden Feldern 28, 169.

- Kienzle, R., Über die Zerstörung von Elektronenraumladungen durch positive Trägerstrahlen 30, 401.
- Kindler, H., Über die Abhängigkeit der magnetischen Nachwirkung von inneren Spannungen 28, 375.
- Kipphan, E. vgl. Becker, A. 28, 465.
- Kirchner, F., Die submikroskopische Rauigkeit von Metalloberflächen und ihr Einfluß auf das Elektroneninterferenzbild 28, 21. — Irrationale Interferenzpunkte (Antwort an Herrn v. Laue) 30, 619. — Über das Verhalten eines Elektronenbündels einheitlicher Geschwindigkeit nach der Durchdringung einer dünnen Folie 30, 683.
- Kirchner, F., Neuert, H. u. Laaff, O., Über das Ionisationsvermögen schneller Lithiumteilchen 30, 527.
- Kirchner, F. u. Rüdiger, O., Über die irrationalen Interferenzerscheinungen beim Durchgang schneller Elektronen durch kleine Kristalle 30, 609.
- Kofink, W., Statistische Thermodynamik unter Zugrundelegung der Quantenmechanik in Hartreescher Näherung 28, 264. — Über das magnetische und elektrische Moment des Elektrons nach der Diracschen Theorie 30, 91.
- Kohler, M., Änderung der Wärmeleitfähigkeit von Metallen im transversalen Magnetfeld 29, 256.
- Kohler, M. u. von Laue, M., Berichtigung zu Arbeiten über die dynamische Theorie der Röntgeninterferenzen (Ann. d. Phys. 18, 265, 1933 und 23, 705. 1935.) 30, 752.
- Kraus, P., Die Wiedervereinigung von Ionen in Luft bei hohen Drucken 29, 449.
- Krüger, F. u. Brasack, F., Über den natürlichen Magnetismus von Kristallen 30, 113.
- Kruppke, E., Zur Einfach- und Vielfachstreuung mittelschneller Kathodenstrahlen durch Metallfolien 30, 577.
- Küstner, H. u. Trübestein, H., Die Analyse der Röntgenstrahlenschwächung in Photoabsorption und Comptonstreuung 28, 385.

L

- Laaff, O. vgl. Kirchner 30, 527.
- Ladenburg, R., Die heutigen Werte der Atomkonstanten e und h 28, 458. — Druckfehlerberichtigung zu Rud. Ladenburg, Bd. 28, S. 458 bis 464 29, 208.
- Langenberg, R., Ramanuntersuchungen an Gläsern 28, 104. — Die elektrische Beeinflussung der Polarisation der Ramanlinien 28, 132.
- v. Laue, M., Helligkeitswechsel längs Kossellinien 28, 528. — Die Erkennung submikroskopischer Kristallflächen durch Elektronenbeugung. (Nach Versuchen W. Cochranes u. u. L. Brücks) 29, 211. — „Irrationale“ Interferenzpunkte bei Elektronenbeugung. (Erwiderung an F. Kirchner u. O. Rüdiger) 30, 616.
- v. Laue, M. vgl. Kohler, M. 30, 752.
- Lehmann, K. O., Über die Theorie der Netztöne. (Thermisch erregte Schallschwingungen) 29, 527.
- Lenz, E., Richtungsmessungen von Ultrastrahlungsteilchen auf dem Jungfrauoch 29, 741.
- Leventer, I. P. vgl. Engl, J. 29, 369.
- Linde, J. O., Röntgenographische und elektrische Untersuchungen des CuPt-Systems 30, 151.
- Lippert, W., Über eine Nullmethode zur Bestimmung der Halbwertszeit metastabiler Atomzustände 30, 136.

Lonn, E., Zur Theorie der Schwingungen von Kristallplatten. (Bemerkungen zu Arbeiten von Petrzilka) **30**, 420.

Luft, K. F. vgl. Meissner, K. W., **28**, 667. — **29**, 698.

M

Malsch, J., Die Struktur die Dipolflüssigkeiten **29**, 48. — Über optische Strom- und Spannungsmessungen bei Ultrakurzwellen nach der Schlierenmethode **30**, 534.

Maue, A. W., Die Rotationswärme des Methans **30**, 555.

Mayer, H., Die lichtelektrischen Eigenschaften von Kaliumschichten atomarer Dicke auf Platin. I **29**, 129. — Druckfehlerberichtigung zu Herbert Mayer: „Die lichtelektrischen Eigenschaften von Kaliumschichten atomarer Dicke auf Platin“ **30**, 112.

Mehnert, E. vgl. Tomaschek, R. **29**, 306.

Meißer, O., Temperaturkompensiertes Stabpendel **28**, 114.

Meißner, K. W. u. Ebbinghaus, E., Zur Kenntnis des Natriumspektrums **29**, 713.

Meißner, K. W. u. Luft, K. F., Die Hyperfeinstruktur der Natrium-D-Linien **28**, 667. — Das Spektrum von Natrium I bei hoher Auflösung und die Struktur der 2D -Terme **29**, 698.

Meißner, K. W. u. Weinmann, W., Zur Kenntnis der Bergmannserie des Caesiums **29**, 758.

Meißner, W., Über die Änderung des elektrischen Widerstandes von verfestigtem Platin beim Tempern. (Teilweise nach Messungen mit H. Westerhoff u. P. Grassmann) **29**, 264.

Meitner, L., Über die β - und γ -Strahlen der Transurane **29**, 246.

Meixner, J., Die Greensche Funktion der Diracgleichung **29**, 97. — Über die Auswertung von Zählrohrmessungen **30**, 665.

Merz, A., Über die Absorptionsspektren der Praseodymsalze und ihre Zeemaneffekte **28**, 569.

Meyer, H., Umladungen von H- und He-Kanalstrahlen in Gasen im Geschwindigkeitsbereich von 30 bis 200 e-kV **30**, 635.

Mollwo, E., Über Elektronenersatzleitung und Halogenüberschuß in Alkalihalogenidkristallen **29**, 394.

Moser, H., Untersuchungen über die Anregung von Quecksilber durch Stoß langsamer positiver Quecksilberionen **28**, 97.

N

Neuert, H. vgl. Kirchner, F. **30**, 527.

Niessen, K. F., Über die Wirkung eines vertikalen Dipolenders auf ebener Erde in einem Entfernungsbereich von der Ordnung einer Wellenlänge **28**, 209. — Eine Verschärfung der verbesserten Sommerfeldschen Fortpflanzungsformel für drahtlose Wellen zur Ausbreitung ihres Gültigkeitsgebietes nach kleineren Abständen **29**, 569. — Zur Entscheidung zwischen den beiden Sommerfeldschen Formeln für die Fortpflanzung von drahtlosen Wellen **29**, 585.

Nothdurft, W., Zur Absolutmessung des Wärmeleitvermögens von Gasen **28**, 137. — Ein Versuch zur Messung des Wärmeleitvermögens von schwerem Wasserstoff **28**, 157.

O

Ortmann, H. vgl. Riehl, N. 29, 556.

P

Papsdorf, W., Strukturuntersuchungen über Rauhigkeit und Korngröße mittels Elektroneninterferenzen 28, 555.

Paul, M., Über die Abhängigkeit der Entropievermehrung quasiadiabatischer Arbeitsprozesse von der Temperatur und von der Dehnungsgeschwindigkeit 29, 179.

Paylík, B., Beitrag zur Untersuchung der Biegungsschwingungen bei parallelogrammartigen Platten mit freien Rändern 28, 353. — Beitrag zur Untersuchung des Zusammenhanges der bei Biegungsschwingungen an rechteckigen und quadratischen Platten beobachteten Staubfiguren 28, 632.

Pich, R. vgl. Schaefer, Cl. 30, 245.

Pietzner, J. vgl. Senftleben, H. 30, 541.

Podszus, E., Der Widerstand von Bor. Bemerkungen zu der Arbeit von F. P. Henninger „Widerstandsmessungen am Bor und am Siliciumcarbid“ 29, 61.

Pohl, R. W., Über den Einfluß der Temperatur auf den lichtelektrischen Primärstrom in Kristallen 29, 239.

R

Ramm, W. vgl. Debye, P. 28, 28.

Rasmussen, R. E. H., Über die Strömung von Gasen in engen Kanälen 29, 665.

Reddemann, H., Transversale Thermokraft in Einkristallen 29, 286.

Reiss, K. H., Versuche zum Stromleitungsmechanismus in Flüssigkeiten

niedriger Dielektrizitätskonstante 28, 325. — Berichtigung zu der Arbeit „Versuche zum Stromleitungsmechanismus in Flüssigkeiten niedriger Dielektrizitätskonstante“ 30, 34.

Renner, Fr., Zur Theorie des atomaren lichtelektrischen Effektes 29, 11.

Reuter, Heinz, Bestimmung des spezifischen Widerstandes von Platin in Abhängigkeit von der Drahtdicke, als Beitrag zur Kenntnis der freien Weglänge der Leitungselektronen 30, 494.

Richter, Gustav, Über die magnetische Nachwirkung am Carbonyl-eisen 29, 605.

Richter, H., Zweimalige Streuung schneller Elektronen 28, 533.

Riedel, L., Versuche zur experimentellen Bestimmung der freien Weglänge der Elektronen in Blei und Cadmium 28, 603.

Riehl, N., Aufbau und Wirkungsweise leuchtfähiger Zinksulfide und anderer Luminophore 29, 636.

Riehl, N. u. Ortmann, H., Über die Druckzerstörung von Phosphoren 29, 556.

Rindfleisch, H., Über den K -Sprung von $Al_{(13)}$ bis $W_{(74)}$ 28, 409.

Rögner, H., Über Entstehung und Beweglichkeit von Farbzentren in Alkalihalogenidkristallen 29, 386.

Rüdiger, O., Strukturuntersuchungen an dünnen, orientiert aufgedampften Metallschichten 30, 505. — vgl. Kirchner, F. 30, 609.

S

Senftleben, H. u. Gladisch, H., Der Einfluß magnetischer Felder auf die innere Reibung von Gasen 30, 713.

Senftleben, H. u. Pietzner, J., Die Einwirkung magnetischer Felder auf das Wärmeleitvermögen von Gasen IV. Untersuchungen an Mischungen von Sauerstoff mit diamagnetischen Gasen 30, 541.

Sitte, K. vgl. Fürth, R. 30, 388.

Sommerfeld, A., Zur spezifischen Wärme der Metallelektronen 28, 1. — Über die Form der Comptonlinie I 29, 715.

Sommermeyer, K. Bemerkungen über die Wärmezeugung in der positiven Säule von Entladungen in einatomigen Gasen 28, 240.

Swedenborg, H. u. Claesson, M., Feinstrukturuntersuchung an der K-Absorptionskante von Kupfer bei niedrigen Temperaturen 28, 159.

Sch

Schaefer, Cl. u. Pich, R., Ein Beitrag zur Theorie der Totalreflexion 30, 245.

Schaffernicht, W., Horizontalpendelbeobachtungen über Lotschwankungen in Marburg/Lahn 29, 349.

Schlechtweg, H., Über die Beeinflussung der ferromagnetischen Eigenschaften kubischer Einkristalle durch mechanische Spannungen 28, 701.

Schmelzer, Ch., Absolutmessung dielektrischer Verluste bei hohen Frequenzen mit dem Kondensatorthermometer 28, 35.

Schmerwitz, G., Das abweichende Verhalten der Dämpfungskopplung von den bekannten Kopplungserscheinungen 30, 209.

Schmid, E. u. Staffelbach, F., Über den spezifischen Widerstand des Tellurs 29, 273.

Schön, K., Über die anomale Dispersion des angeregten Argons 28, 649.

Schubert, F., Optische Eigenschaften glühender Metalle 29, 473.

Schulze, F. A., Über einige Erweiterungen des Wienschen Verschiebungsgesetzes 29, 297.

St

Staffelbach, F. vgl. Schmid, E. 29, 273.

Stehberger, K. H., Statische Messungen an Elektronenstrahlen 30, 621.

Steubing, W. u. Stolpe, F., Über die Zerlegungsphasen und Feldstärkenverhältnisse bei Kombination von Zeeman- und Starkeffekt an den Heliumlinien 30, 1.

Stolpe, F. vgl. Steubing, W. 30, 1.

T

Tomaschek, R. u. Mehnert, E., Über die Fluoreszenz von Gadoliniumsalzen und deren Lösungen 29, 306.

Tomaschek, R. vgl. Deutschbein, O. 29, 311.

Tomaschek, R., vgl. Gobrecht, H. 29, 324.

Travniček, M., Über Zementphosphore 30, 224.

Trillat, J. J. u. Hautot, A., Über das Verhalten eines Bündels monokinetischer Elektronen nach Durchdringung einer absorbierenden Folie 30, 165.

Tropper, H., Schwingungserscheinungen an flüssigen Kristallen 30, 371.

Trübestein, E. vgl. Küstner, H. 28, 385.

V

Veith, W., Elektronenerregung und Trägerreflexion beim Auftreffen von K^+ -Trägern auf Metalle 29, 189. — Berichtigung zu der Arbeit: Elektronenerregung und Trägerreflexion beim Auftreffen von K^+ -Trägern auf Metalle 30, 688.

Vogt, E., Zum Dia- und Paramagnetismus in metallischen Mischkristallreihen IV: Über die Auswertungsverfahren für die Messungen des Paramagnetismus gelöster Übergangsmetalle 29, 358.

W

Weinmann, N. vgl. Meissner, K.W. 29, 758.

Wessel, W., Über den Einfluß des Verschiebungsstromes auf den Wechselstromwiderstand einfacher Schwingungskreise 28, 59.

Wetterer, G., Die Bremsung homogener Neutronen beim Durchgang durch wasserstoffhaltige Substanzen 30, 284.

Wien, M., Bild mit Widmung 28, 1.

Wisshak, F., Zum Problem der Röntgenfunkenlinien 28, 71.

Wolf, F., Über den Durchgang schwerer und leichter Wasserstoffionen durch Argongas 28, 361. — Über die Umladung von Alkalitionen durch verschiedene Gase 28, 438. — Über Ionenstöße bei strenger Resonanz 29, 33. — Über die Gültigkeitsgrenzen des Resonanzprinzips der Umladung 30, 313.

les
en
er

o-
og
en

1.
er

g
f-

i-

3,

er

g-

s

ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren und fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff, G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien

Der ganzen Reihe 422. Band

Kuratorium:

W. Gerlach	F. Paschen	M. Planck
R. W. Pohl	A. Sommerfeld	M. Wien

Unter Mitwirkung
der Deutschen Physikalischen Gesellschaft
herausgegeben von

E. GRÜNEISEN, Marburg/L.
M. PLANCK, Berlin

Mit 37 Abbildungen im Text



LEIPZIG / VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Redaktionsschluß am 25. November 1937

Inhalt

	Seite
J. Meixner-Gießen, Über die Auswertung von Zählrohrmessungen . .	665
F. Kirchner-Köln, Über das Verhalten eines Elektronenbündels einheitlicher Geschwindigkeit nach der Durchdringung einer dünnen Folie. (Mit 3 Abbildungen)	683
Werner Veith-Heidelberg, Berichtigung zu der Arbeit: Elektronenerregung und Trägerreflexion beim Auftreffen von K^+ -Trägern auf Metalle	688
G. Hottenroth-Berlin-Reinickendorf, Untersuchungen über Elektronenspiegel. (Mit 18 Abbildungen)	689
Hermann Senftleben und Heinz Gladisch-Münster (Westf.), Der Einfluß magnetischer Felder auf die innere Reibung von Gasen. (Mit 6 Abbildungen)	713
Anton Hammer-München, Ferromagnetismus und elektrische Eigenschaften. VII. Mitteilung: Thermokraft, Thomsonkoeffizient und Wärmeleitvermögen von Nickel. (Mit 9 Abbildungen)	728
Berichtigung zu Georg Bauer, Bd. 30, S. 433—445.	744
K. Försterling-Köln, Über die Messung der optischen Konstanten sehr dünner Metallschichten. (Mit 1 Abbildung)	745
M. Kohler und M. v. Laue-Berlin, Berichtigung zu Arbeiten über die dynamische Theorie der Röntgeninterferenzen.	752
Namenregister zum Jahrgang 1937, Band 28—30	753

Für diese Zeitschrift werden grundsätzlich nur Arbeiten angenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung geht das alleinige Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung einschließlich des Rechtes der Veranstaltung von Sonderdrucken auf den Verlag über. Von jeder Arbeit liefert der Verlag 75 Sonderabzüge kostenlos.

1938 erscheinen die Bände 31—33 der 5. Folge. Bezugspreis je Band: Inland RM. 26.—, Porto RM. 1.20; Ausland, mit Ausnahme Palästinas RM. 19.50 wenn in Devisen oder freien Reichsmark gezahlt wird, Porto RM. 2.—. Mitgliedern der Deutschen Physikalischen Gesellschaft und der Gesellschaft für technische Physik wird ein Vorzugspreis gewährt. Einzelpreis dieses Heftes: Inland RM. 4.—, Ausland RM. 3.—.

Die Zeitschrift kann durch jede Buchhandlung, in Ausnahmefällen auch durch den Verlag bezogen werden.

Die Redaktion der Annalen wird von den auf der Titelseite genannten Herren besorgt. Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn **Geh.-Rat Prof. Dr. E. Grüneisen, Marburg/L., Mainzer Gasse 33**, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten. Die **Zeichnungen** sind in sorgfältiger Ausführung auf besonderen Blättern beizulegen.

Bei den **Zitaten** wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, das jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

Für den Weihnachtstisch des Physikers

ALFRED WEGENER†
Dr. KURT WEGENER

Prof. d. Meteorologie u. Geophysik a. d. Univ. Graz/Steiermark

Vorlesungen über Physik der Atmosphäre

XII, 482 Seiten mit 192 Abbildungen im Text und auf 1 Tafel. 1935. 8°. RM. 36.—, geb. RM. 38.—

Petermanns Geograph. Mitt.: Das Werk enthält eine reiche Fülle von Einzeldarstellungen, hauptsächlich solcher meteorologischen Vorgänge, die den Brüdern Wegener bei ihren Ballonfahrten und Expeditionen aufgestoßen waren, so daß jeder Leser dieses Werkes es mit Befriedigung und Gewinn wieder aus der Hand legen wird. Besonders zu erwähnen ist die Behandlung der meteorologisch-optischen Erscheinungen. Lobend hervorgehoben werden muß die vorzügliche Ausstattung und die Beigabe prächtiger Abbildungen, besonders auch Wolkenbilder.

Die Naturwissenschaften: Die Ausführungen sind leicht lesbar, die Rechnungen durchwegs elementar gehalten und stellen an den Leser auch in mathematischer Hinsicht nur geringe Anforderungen. Druck und Ausstattung des Buches sind gut, die Abbildungen teilweise recht instruktiv.

Dr. KURT WEGENER

Prof. d. Meteorologie u. Geophysik a. d. Univ. Graz/Steiermark

Die Physik der Erde

Eine Einführung in verständlicher Darstellung. VI, 111 Seiten mit 53 Abbildungen im Text. 1934. 8°.

Steif brosch. RM. 6.60

Das Weltall: Dieses Werk gibt einen Einblick in die wissenschaftlichen Methoden, die es möglich machten, zu einer Kenntnis des physikalischen Aufbaus der Erde zu gelangen. Die Eigenschaften der Gesteine, die Gesetze der Temperatur, des Druckes und der Dichte, die Messungen der Erdbebenwellen, des Erdmagnetismus und der Schwere finden anschauliche Darstellung. Der Verfasser hat es geschickt vermieden, durch eine Häufung von möglichen Theorien sein Werk zu belasten, und hat jeweils die wahrscheinlichste Theorie zur Darstellung gebracht. Dadurch ist es ihm gelungen, ein wirklich übersichtliches Werk zu schaffen.

Verlangen Sie bitte mein ausführliches Verzeichnis „Naturwissenschaften“

JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Beiträge zur Elektronenoptik

Vorträge auf der Physikertagung 1936 sowie ergänzende Beiträge. Hrsg. von den Einführenden Prof. Dr. H. BUSCH, Darmstadt, und Dr.-Ing. E. BRÜCHE, Berlin. V, 156 S. mit 209 Abb. im Text und 1 Titelbild. 1937. gr. 8°. Geb. RM. 16,50

Inhalt:

- I. **Zur Einführung:** H. Busch: Grundlagen und Entwicklung der Elektronenoptik. — E. Brüche: Experimentelle Elektronenoptik und ihre Anwendung. — O. Scherzer: Die Aufgaben der theoretischen Elektronenoptik.
- II. **Abbildungssysteme und Abbildungsfehler:** K. Diels und G. Wendt: Die 8 Bildfehler dritter Ordnung magnetischer Elektronenlinsen. — W. Glaser: Elektronenbewegung als optisches Problem. — O. Scherzer: Berechnung der Bildfehler dritter Ordnung nach der Bahnmethode. — A. Recknagel: Elektronenspiegel und Elektronenlinse.
- III. **Das Elektronenmikroskop und seine Anwendung:** E. Ruska: Elektronenmikroskop und Übermikroskop. — F. Krause: Neuere Untersuchungen mit dem magnetischen Elektronenmikroskop. — R. Suhrmann: Emissionsforschung mittels elektronenoptischer Methoden. — H. Mahl: Das elektronenoptische Strukturbild und seine Anwendung.
- IV. **Weitere elektronenoptische Geräte:** W. Gröber: Elektronenoptik der Braunschen Oszillographenröhre. — H. Rothe und W. Kleen: Die Bedeutung der Elektronenoptik in der Technik der Verstärkeröhren. — W. Schaffernicht und H. Katz: Der elektronenoptische Bildwandler. — G. Weiß: Über Sekundärelektronen-Vervielfacher.
- V. **Fernsehen und Elektronenoptik:** F. Schröter: Die neuere Entwicklung der Fernsehtechnik. — M. Knoll: Elektronenoptik der Fernseh-Bildfeldzerleger. — W. Heilmann: Über Arbeitsweise und Grenzen elektronenoptischer Bildabtaströhren.

Literaturverzeichnis. — Sachverzeichnis.

Elektronenemission und Adsorptionserscheinungen

Von Dr. J. H. DE BOER, Eindhoven. Nach der engl. Ausgabe übersetzt von Dr. K. Siebertz, Berlin, und vom Verfasser überarbeitet und ergänzt. Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Schottky, Berlin. XII, 322 Seiten mit 152 Abbildungen im Text. 1937. RM. 21.—, geb. RM. 22,50

Die Naturwissenschaften: Das Thema dieses sehr willkommenen Buches ist der Zusammenhang zwischen Elektronenemission (äußerer und innerer Photoeffekt, Glühemission, elektronische Halbleiter) und Adsorptionsvorgängen an äußeren und inneren Oberflächen. An Hand eines klaren und umfassenden Leitgedankens ein so vielfältiges und unübersichtliches Gebiet in allen Einzelheiten dargestellt zu sehen, ist sowohl für die Forschung als auch für den Lernenden ein großer Gewinn. Von der Fülle eigener und fremder Beobachtungen, die hier in logischem Zusammenhang aneinander gereiht sind, kann nur das Studium des Buches selbst einen Eindruck geben. Es ist ein Werk, in dem man nicht große Teile als „bekannt“ überschlagen kann, sondern das auf jeder Seite wichtige und originelle Erkenntnisse und Ergebnisse vermittelt. (über die engl. Ausgabe.)

Die deutsche Ausgabe darf dieses Urteil in erhöhtem Maße für sich beanspruchen, denn sie zeigt gegenüber dem englischen Original wichtige Abwandlungen, die eine weitgehende Vertiefung und Bereicherung bedeuten.

JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

K
ei-
n-
b.
50

n-
ie
er:
er
k-

n-
it
r-
n-

1-
er
nt
e-

er
1-

e
r
.
.
0
t
r
-
t
s
l
r
.
l